

リスクプレミアムの2段階推定における バイアスの修正方法の比較

木 下 亮

1 はじめに

株価が投資家の合理的行動によって形成されていると想定するのであれば、高い期待リターンには、何らかのリスクが伴う。このようなリスクとリターンのトレードオフに関してはCAPMやAPTによって線形モデルとして構築されており、広く実証分析が行われている。

しかしながら、先行研究で提案されているリスクプレミアムの推定量は、必ずしも統計的に望ましい性質を満たさない。そのため、推定方法の開発と推定量の性質の調査はファイナンス分野における主要なテーマのひとつである。時系列回帰とクロスセクション回帰の2段階推定がリスクプレミアムを推定するための古典的な方法である。この方法は以下のような手順で行われる。初めに各ポートフォリオのリターンをファクターに回帰することで、ベータを推定し、次に各ポートフォリオの平均リターンを推定されたベータに回帰することで各リスクファクターのリスクプレミアムを推定する方法である。この方法は、2段階目の推定において真のベータではなく、推定されたベータを用いるため説明変数に観測誤差を含む回帰分析に対応する。通常の説明変数に観測誤差を含む回帰分析では、不偏性と一致性が保証されない。しかし、この分析の場合にはベータの推定量が一致推定量であるため、観測誤差が漸近的に除去されることになり、2段階目のリスクプレミアムの推定量の一致性も保証される。しかしながら、有限標本ではリスクプレミアムの推定量にバイアスが存在する。本稿では、このバイアスを除去するための推定量を提案する。

通常の説明変数に観測誤差がある回帰分析では、推定量の漸近バイアスを観測誤差の分散を用いて表現できることが知られている。リスクプレミアムの推定における2段階推定において、2段階目に用いられる説明変数であるベータの推定値は、1段階目の推定によって得られるものであるから、その漸近分散が観測誤差の分散に対応することになり、その推定量を用いてバイアスの修正が可能となる。この考え方を応用し、Bai and Zhou (2015) はバイアスの内の $1/T$ のオーダーの項を修正する推定量を提案している。彼らのバイアス補正項は、従来の回帰分析における漸近バイアス項と類似した表現となっている。また、シミュレーションによって、有限標本の場合にバイアスが無視できない大きさである場合があることを示し、提案した推定量で大きくバイアスを修正できることが確認されている。Bai and

Zhou (2015) では、通常の2段階目の推定量にバイアス項の推定量を加えることによるバイアスの修正を提案している。一方で、本稿で提案する推定量は、2段階目の推定量に修正を加えたものである。2段階目の最小二乗推定量には、ベータの推定量の二次モーメント行列の逆行列が用いられる。ベータの推定量は、真のベータに推定誤差を加えたものである。したがって、ベータの推定量の積として二次モーメント行列を推定すると過大推定されることになる。これをバイアス修正したもので置き換えることで、新しいリスクプレミアムの推定量を提案する。提案された推定量は、Bai and Zhou (2015) の推定量のバイアス修正項の二次モーメント行列を置き換えたものと同値である。また、Bai and Zhou (2015) のものと同様に、本稿で提案する推定量の漸近分布はShanken (1992) で導出されたものになる。

また、Bai and Zhou (2015) の方法及び本稿で提案した推定量に関するモンテカルロ実験を行い、各手法の有限標本における性質を調査した。バイアス修正を行うことで、推定量のバイアスは小さくなるが、*RMSE* は必ずしも改善されなかった。また、本稿で提案するバイアス修正とBai and Zhou (2015) の方法の比較を比較すると、本稿の推定量の方が若干バイアスが小さいが、*RMSE* は大きい傾向があった。

多くの先行研究では、バイアス修正を行わない2段階推定が採用されている。広く統計的有意性が確認されているモデルがFama and French (1993) における3ファクターモデルである。本稿では、国内株式データを用いて代表的かつ基礎的モデルであるCAPM、消費CAPM (CCAPM)、異時点間CAPM (ICAPM)、Fama and French (1993) の3ファクターモデルを用いて、提案された推定量に関する実証例を示す。バイアス修正によって推定結果が大きく異なる場合があることが確認された。

本稿の構成は以下の通りである。第2節では、はじめに本稿で用いるモデル及び先行研究で提案されているリスクプレミアムの推定方法について述べる。また、それらの推定方法に関する統計的性質及び問題点とその解決法の変遷を整理し、本稿での焦点である推定量のバイアスに関する説明を行う。第3節では、モンテカルロ実験であり、第4節は国内株式データを用いた実証例である。

2 モデル

個別資産の t 期のリターンを $R_{i,t}$ 、ファクターを $k \times 1$ のベクトル $f_t = (f_{1,t}, f_{2,t}, \dots, f_{k,t})'$ と表記する。また、資産の数を n とし、 $R_i = (R_{1,t}, R_{2,t}, \dots, R_{n,t})'$ 、 $R = (R_1, R_2, \dots, R_T)'$ 、 $F = (f_1, f_2, \dots, f_T)'$ とする。個別資産のリターンは

$$R_{i,t} = \mu_i + \beta_i f_t + \varepsilon_{i,t} \quad (2.1)$$

で生成されると仮定する。ただし、

$$\mu_i = \alpha + \beta_i \lambda \quad (2.2)$$

であり、 λ がリスクプレミアムである。一般性を失うことなく、 $E[f_t] = E[\varepsilon_{i,t}] = 0$ とし、 $\varepsilon_t = (\varepsilon_{1,t}, \varepsilon_{2,t}, \dots, \varepsilon_{n,t})'$ 、 $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_T)'$ 、 $\Sigma_f = E[f_t f_t']$ と表記する。 ε_t は独立同一分布であり、 $\sigma_i^2 = E[\varepsilon_{i,t}^2]$ 、 $i = 1, 2, \dots, n$ とし、 $\Sigma = E[\varepsilon_t \varepsilon_t'] = \text{diag}(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_n^2)$ とする。また、 $E[f_t \varepsilon_s] = 0$ 、 $\forall t, s$ と仮定する。すなわち、(2.1) において説明変数であるファクター f_t に過不足はないとする。ここで $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)'$ と表記することで、ベクトルを用いた表現

$$R = F\beta + \varepsilon$$

を得る。特に、収益率を $R_{f,t}$ とする安全資産が存在する場合には $\alpha = R_{f,t}$ となり、(2.2) は $\mu_i - R_{f,t} = \beta_i \lambda$ と表現することができ、超過リターンに関するモデルを得る。ファクター f_t をマーケットリターンとする場合には CAPM に帰着する。

このモデルでは、リターンの共分散と期待値に共通のパラメータ β_i を含み、資産間で共通のパラメータ λ を含む非線形モデルである。モデルの推定に対しては β を推定する時系列回帰と λ を推定するクロスセクション回帰を行う 2 段階推定と最尤法が主流であるが、本稿では、2 段階推定に焦点を当てる。

2.1 リスクプレミアムの推定

2 段階推定と最尤法のいずれを用いた場合でも、リスクプレミアム λ の推定量は、必ずしも望ましい統計的性質を満たさない。そのためリスクプレミアム λ の推定方法の開発と推定量の統計的性質の調査は、ファイナンスにおける主要なテーマのひとつである。以下では、2 段階推定の手順を説明し、先行研究で明らかになっている統計的性質を確認する。

もし、 β を観測することができるのであれば μ_i の代わりに推定値であるリターンの標本平均 $\bar{R} = 1/T \sum_{i=1}^T R_i$ を用いて、最小二乗法により推定を行うことで不偏推定量を得ることができる。しかしながら、実際には β は観測できないため推定量で代用することになる。

そこで、多くの先行研究では、以下のような 2 段階推定が用いられている。第 1 段階で (2.1) に関する最小二乗法による推定を行い、推定値 $\hat{\beta} = ((F'F)^{-1}F'R)'$ を得る。さらに、 μ_i の推定値としてリターンの標本平均 \bar{R} を用いて、(2.2) に対する回帰分析を行うのが 2 段階推定による方法である。リスクプレミアム λ の推定量は

$$\hat{\lambda} = (\hat{\beta}'\hat{\beta})^{-1}\hat{\beta}'\bar{R} \quad (2.3)$$

である。この方法は、数値上 Fama and MacBeth (1973) の推定量と同値である。リスクプレミアムが時間を通じて一定である場合には、どちらの方法を用いてもよい。

この方法では、2 段階目の推定において、推定値である $\hat{\beta}$ を β に代わりに用いるため、説

明変数に観測誤差を含むことになる。しかしながら、通常の観測誤差がある場合の回帰分析とは違い、 $\hat{\beta}$ は β の一致推定量であるため、観測誤差が漸近的に除去されることになる。したがって、2段階目のリスクプレミアムの推定の不偏性を持たないが、一致性を持つ。ここで、 $\bar{f}=1/T\sum_{t=1}^T f_t$ 、 $\bar{\varepsilon}=1/T\sum_{t=1}^T \varepsilon_t$ とし、 $\hat{\beta}=\beta+u=\beta+(F'F)^{-1}F'\varepsilon$ であることに注意して、

$$\bar{R} = \beta\lambda + \beta\bar{f} + \bar{\varepsilon}$$

を (2.3) に代入すると、

$$\begin{aligned}\hat{\lambda} &= (\hat{\beta}'\hat{\beta})^{-1}\hat{\beta}'(\beta\lambda + \beta\bar{f} + \bar{\varepsilon}) \\ &= \lambda - (\hat{\beta}'\hat{\beta})^{-1}\hat{\beta}'u\lambda + (\hat{\beta}'\hat{\beta})^{-1}\hat{\beta}'\beta\bar{f} + (\hat{\beta}'\hat{\beta})^{-1}\hat{\beta}'\bar{\varepsilon}\end{aligned}\quad (2.4)$$

となる。上式 (2.4) において、第1項は、 $(\hat{\beta}'\hat{\beta})^{-1}\hat{\beta}'u\lambda = (1/T\hat{\beta}'\hat{\beta})^{-1}(1/T)\hat{\beta}'u\lambda \xrightarrow{p} 0$ である。同様に第2項と第3項もゼロに収束することから、 β の代わりに $\hat{\beta}$ を用いて回帰分析を行った場合でも、リスクプレミアム λ を一致推定できることが確認できる。また、 β の観測誤差を考慮し、 $O_p(1/\sqrt{T})$ の項に着目して、漸近分布を導出したのが、Shanken (1992) である。すなわち、

$$\sqrt{T}(\hat{\lambda} - \lambda) \xrightarrow{d} N(0, (\beta'\beta)^{-1}\beta'\Sigma\beta(\beta'\beta)^{-1}(1 + \lambda'\Sigma_f^{-1}\lambda) + \Sigma_\varepsilon) \quad (2.5)$$

である。また、 $\hat{\beta}=\beta$ 、すなわち β に観測誤差がない場合の漸近分散は $(\beta'\beta)^{-1}(\beta'\beta)^{-1} + \Sigma_\varepsilon$ である。Shanken (1992) の方法は、モデルの特定化が正しいことを前提としたものであったが、Kan et al. (2013) によって、特定化に誤りがある場合、すなわち2段階目の回帰分析における真の決定係数が1でない場合の漸近分散が導出されている。

2.2 バイアスの修正

しかしながら、有限標本の場合には $\hat{\lambda}$ は λ の不偏推定量ではない。つまり、必ずしも $E[\hat{\lambda}] = \lambda$ が成立しない。これは、 β に観測誤差があること及び、その観測誤差が2段階目の回帰分析の誤差項である $\beta\bar{f} + \bar{\varepsilon}$ と相関していることが原因である。この問題に対し、Bai and Zhou (2015) は、(2.4) の第1項に着目したバイアス修正を提案している。第1項は、

$$\begin{aligned}(\hat{\beta}'\hat{\beta})^{-1}\hat{\beta}'u\lambda &= (\hat{\beta}'\hat{\beta})^{-1}\hat{\beta}'(\hat{\beta} - \beta)\lambda \\ &= (\hat{\beta}'\hat{\beta})^{-1}(\hat{\beta} - \beta)'(\hat{\beta} - \beta)\lambda + (\hat{\beta}'\hat{\beta})^{-1}\beta'(\hat{\beta} - \beta)\lambda\end{aligned}$$

と表現できる。ここで、

$$T(\hat{\beta}'\hat{\beta})^{-1}(\hat{\beta} - \beta)'(\hat{\beta} - \beta)\lambda = T(\hat{\beta}'\hat{\beta})^{-1}(F'F)^{-1}F'\varepsilon\varepsilon'F(F'F)^{-1}\lambda$$

$$= (\hat{\beta}'\hat{\beta})^{-1}\left(\frac{1}{T}F'F\right)^{-1}\frac{1}{T}F'\varepsilon\varepsilon'F\left(\frac{1}{T}F'F\right)^{-1}$$

である。仮定により F と ε は独立であるから、

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T}F'\varepsilon\varepsilon'F = E[F'\varepsilon\varepsilon'F] = E[FE[\varepsilon\varepsilon']F] = E\left[F\sum_{i=1}^n\sigma_i^2I_TF\right] = \left(\sum_{i=1}^n\sigma_i^2\right)E[ff_i']$$

となる。したがって、

$$\lim_{T \rightarrow \infty} T(\hat{\beta}'\hat{\beta})^{-1}(\hat{\beta}-\beta)'(\hat{\beta}-\beta)\lambda = (\beta'\beta^{-1})\left(\sum_{i=1}^n\sigma_i^2\right)(E[ff_i'])^{-1} \quad (2.6)$$

である。また、 $\hat{\beta}'\hat{\beta} = \beta'\beta + u'u + \beta'u + u'\beta$ であるから

$$\lim_{T \rightarrow \infty} T(\hat{\beta}'\hat{\beta} - \beta'\beta) = \left(\sum_{i=1}^n\sigma_i^2\right)E[ff_i']^{-1} \quad (2.7)$$

となる。ここで、(2.6) と (2.7) を推定値で置き換えることにより、

$$\hat{\lambda}_1^* = \hat{\lambda} + \left(\hat{\beta}'\hat{\beta} + \left(\sum_{i=1}^n\hat{\sigma}_i^2\right)(F'F)^{-1}\right)^{-1}\left(\sum_{i=1}^n\hat{\sigma}_i^2\right)(F'F)^{-1}\hat{\lambda} \quad (2.8)$$

としてバイアス修正を行うのが Bai and Zhou (2015) で提案された方法である。本稿では、この方法に若干の修正を加えた推定量を提案する。Bai and Zhou (2015) では (2.8) において、 $\beta'\beta$ の代わりに、 $\hat{\beta}'\hat{\beta} + (\sum_{i=1}^n\hat{\sigma}_i^2)(F'F)^{-1}$ を用いているが、推定量としては $\hat{\beta}'\hat{\beta} - (\sum_{i=1}^n\hat{\sigma}_i^2)(F'F)^{-1}$ が自然である。すなわち、

$$\hat{\lambda}_2^* = \hat{\lambda} + \left(\hat{\beta}'\hat{\beta} - \left(\sum_{i=1}^n\hat{\sigma}_i^2\right)(F'F)^{-1}\right)^{-1}\left(\sum_{i=1}^n\hat{\sigma}_i^2\right)(F'F)^{-1}\hat{\lambda}$$

という推定量が考えられる。また、この推定量は (2.3) の $\hat{\beta}'\hat{\beta}$ を置き換えたものと同値である。すなわち、

$$\hat{\lambda}_2^* = \left(\hat{\beta}'\hat{\beta} - \left(\sum_{i=1}^n\hat{\sigma}_i^2\right)(F'F)^{-1}\right)^{-1}\hat{\beta}'\bar{R} \quad (2.9)$$

である。また、 $\beta'\beta$ の推定に調整を行わずに、バイアス修正を行う推定量

$$\hat{\lambda}_3^* = \hat{\lambda} + (\hat{\beta}'\hat{\beta})^{-1}\left(\sum_{i=1}^n\hat{\sigma}_i^2\right)(F'F)^{-1}\hat{\lambda} \quad (2.10)$$

を考えることもできる。これらの推定量の漸近分布は全て (2.5) となる。

3 モンテカルロ実験

本節では、前節において提案された推定量の有限標本における性質を、モンテカルロ実験によって確認する。リターンに関するモデル (2.1) と (2.2) に基づいてデータを生成する。ただし、 $\alpha=0$ とする。生成されたデータに対して、提案された推定量および Bai and Zhou

(2015)の方法でリスクプレミアム λ の推定を行う。実験の回数を $S=10000$ として、 s 回目の実験における推定値を $\hat{\lambda}^{(s)}$ と表す。推定量のバイアスを確認するため、実験における推定値の標本平均 $1/S\sum_{s=1}^S\hat{\lambda}^{(s)}$ を計算する。また、推定量の精度を $RMSE=\sqrt{1/S\sum_{s=1}^S(\hat{\lambda}^{(s)}-\lambda)^2}$ で評価する。また、以下の全ての実験において、資産の種類を $n=25$ とする。

はじめに、単純な設定における実験を行う。ファクターを一つとし、リスクプレミアムに関してはBai and Zhou (2015)と同じ設定である $\lambda=2/3$ を用いる。各資産のベータを $\beta_i=-12k+ik, i=1, 2, \dots, 25$ とする。実験のパラメータ k が大きい場合には、 $\hat{\beta}'\hat{\beta}$ に占める $\beta'\beta$ の割合が大きい、つまり観測誤差の割合が小さい設定となる。多くの先行研究では、何らかの基準をもとにポートフォリオを作成し、そのポートフォリオのリターンを対象として分析を行っている。Fama and French (1992)で提案された簿価時価比率と時価総額によるソートポートフォリオが典型的なものである。このようなデータを用いる場合には、ポートフォリオの作成の基準として用いた特徴以外の特徴を大数の法則により取り除いてしまう可能性があることがDaniel and Titman (2012)で指摘されている。このような場合には、ポートフォリオ間で特定のファクターに関するベータの値が似通ってしまう可能性がある。したがって、 k が小さい設定での推定量の性質を確認することは、実証研究に対しても示唆を与えるものである。また、 $f_t \sim N(0, 1), \varepsilon_{i,t} \sim N(0, 1)$ とする。

表1は $k=\{0.02, 0.05, 0.1\}, T=\{200, 400, 800\}$ の場合の推定値の平均をまとめたものである。また、括弧内の数値は $RMSE$ を表す。第2節で説明された通り、 $\hat{\lambda}$ はバイアス修正を行わない従来の2段階推定による推定量、 $\hat{\lambda}^*$ はBai and Zhou (2015)によるバイアス修正を行ったもの、 $\hat{\lambda}_2^*$ と $\hat{\lambda}_3^*$ は本稿で提案された推定量であり、Bai and Zhou (2015)に修正を加えたものである。

表1が示すように、 $k=0.02$ の場合、つまりベータの変動が小さい場合には、従来のバイアス修正を行わない推定量 $\hat{\lambda}$ に負のバイアスが存在することが分かる。特に、 $n=200$ の場合には、推定値の平均が0.5465となっており、真のリスクプレミアムである $2/3$ よりも極めて小さい。また、Bai and Zhou (2015)の方法にも負のバイアスが生じてしまっている。本稿で提案する方法では、 $\hat{\lambda}_2^*$ に若干の正のバイアスが生じているが、 $\hat{\lambda}_3^*$ の $n=800$ の場合には、0.6662となっており十分にバイアスが小さくなっている。本文中には記載していないが、 $\beta'\beta$ の推定において、 $\hat{\beta}'\hat{\beta}-(\sum_{i=1}^n\hat{\sigma}_i^2)(F'F/T)^{-1}$ が最もバイアスが小さく $RMSE$ も小さいものであった。これは、 $\beta'\beta$ の良い推定量が、必ずしも λ の良い推定量に結びつかないことを意味している。また、 $RMSE$ の値は、全ての n においてBai and Zhou (2015)の推定量のものが最も小さい値となった。

次に、 $k=0.05$ の場合を確認すると、 $\hat{\lambda}$ には若干の負のバイアスが生じている。バイアス修正を行った推定量ではバイアスが十分に小さくなっており、バイアス修正による推定値の平均及び $RMSE$ の方法間での違いは極めて小さいものであった。

表 1 実験における推定値の平均と RMSE

		$\hat{\lambda}(\text{OLS})$	$\hat{\lambda}_1^*(\text{BZ})$	$\hat{\lambda}_2^*$	$\hat{\lambda}_3^*$
$k = 0.02$	$n = 200$	0.5465 (0.1658)	0.6378 (0.1411)	0.6864 (0.1588)	0.6568 (0.1452)
	$n = 400$	0.5990 (0.1121)	0.6584 (0.1023)	0.6735 (0.1069)	0.6651 (0.1040)
	$n = 800$	0.6198 (0.0876)	0.6630 (0.0812)	0.6701 (0.0829)	0.6662 (0.0819)
$k = 0.05$	$n = 200$	0.6479 (0.0835)	0.6713 (0.0849)	0.6732 (0.0853)	0.6722 (0.0851)
	$n = 400$	0.6549 (0.0611)	0.6671 (0.0613)	0.6676 (0.0614)	0.6673 (0.0613)
	$n = 800$	0.6577 (0.0486)	0.6660 (0.0485)	0.6662 (0.0486)	0.6661 (0.0486)
$k = 0.1$	$n = 200$	0.6652 (0.0732)	0.6715 (0.0740)	0.6716 (0.0741)	0.6715 (0.0741)
	$n = 400$	0.6637 (0.0531)	0.6669 (0.0533)	0.6669 (0.0533)	0.6669 (0.0533)
	$n = 800$	0.6634 (0.0426)	0.6656 (0.0426)	0.6656 (0.0426)	0.6656 (0.0426)

また、 $k=0.1$ の場合を確認すると、バイアス修正なしの推定量においても、バイアスが十分に小さいことが確認できる。資産間で β_i に十分な変動があり、データ数が大きければバイアス修正を行わない推定量でもバイアスが十分に小さくなることになる。

次に、第 4 節における実証分析で推定されたモデルを DGP とした実験を行う。リスクプレミアムを $\lambda = (1.2242, 0.9972)$ とする。これは、第 4 節における ICAPM のバイアス修正を行わない推定量 $\hat{\lambda}$ を用いた場合の推定値である。また、ファクターの第一要素に対するリスクプレミアムを λ_M 、第二要素に対するものを λ_C と表記する。その他のパラメータについては以下の通りである。ファクター f_i について $f_i \sim N(0, \begin{bmatrix} 0.00224 & 0.00003 \\ 0.00003 & 0.00023 \end{bmatrix})$ とする。また、 β_i は 2×25 の行列であるため全てを記載しないが、その標本平均と二次モーメント行列は $\bar{\beta} = (0.9129, 0.09734)$ 、 $\beta' \beta = \begin{bmatrix} 0.0127 & -0.0038 \\ 0.0187 & 0.0218 \end{bmatrix}$ である。 $\varepsilon_{i,t}$ の分散共分散行列の記載は省略する。

表 2 は推定値の平均をまとめたものであり、括弧内の数値は RMSE を表す。バイアス修正を行わない $\hat{\lambda}$ では、全ての n において λ_M に関して正のバイアス、 λ_C に関して負のバイアスが生じている。バイアス修正を行う推定量は、方法間でほとんど同じ推定結果となったが、 $\hat{\lambda}_3^*$ によるものがバイアスが若干小さいものとなった。しかしながら、RMSE は $\hat{\lambda}$ のものが

表2 実験における推定値の平均と RMSE

	$\hat{\lambda}(\text{OLS})$		$\hat{\lambda}_1^*(\text{BZ})$		$\hat{\lambda}_2^*$		$\hat{\lambda}_3^*$	
	λ_M	λ_C	λ_M	λ_C	λ_M	λ_C	λ_M	λ_C
$n = 200$	0.0129 (0.0736)	0.0085 (0.1045)	0.0128 (0.0743)	0.0097 (0.1209)	0.0128 (0.0744)	0.0102 (0.1292)	0.0128 (0.0743)	0.0099 (0.1242)
$n = 400$	0.0133 (0.0515)	0.0067 (0.0769)	0.0132 (0.0518)	0.0072 (0.0841)	0.0132 (0.0518)	0.0073 (0.0858)	0.0132 (0.0518)	0.0072 (0.0848)
$n = 800$	0.0125 (0.0366)	0.0096 (0.0592)	0.0125 (0.0367)	0.0101 (0.0622)	0.0125 (0.0367)	0.0101 (0.0626)	0.0125 (0.0367)	0.0101 (0.0624)

最も小さかった。バイアス修正を行うことで、推定量のバイアスが小さくなる一方で、分散が大きくなってしまったためである。

4 実証例

本節は、国内株式データを用いた実証例である。代表的なモデルである CAPM、消費 CAPM (CCAPM)、異時点間 CAPM (ICAPM) と Fama and French (1993) による 3 ファクターモデルの推定を行う。個別ポートフォリオのリターンには、日本上場株式 久保田・竹原 Fama-French 関連データ (金融データソリューションズから提供) に収録されている、簿価時価比率と時価総額を基準に作成された 25 種類のソートポートフォリオのリターンを利用する。安全資産の利子率及び Fama-French の 3 ファクターも同データベースから取得する。これらのデータは、久保田・竹原 (2007) に基づいて作成されている。また、消費の成長率には、内閣府によって作成されている季節調整済み消費総合指数の成長率を用いる。データの期間は、2009 月から 2016 年 12 月までとし、月次データを用いる。

これらのデータを用いて、上記モデルの推定を行う。CAPM は、超過マーケットリターンを唯一のファクターとするモデルであり、各ポートフォリオの超過リターンは

$$R_{i,t} - R_{f,t} = \beta_i (R_{M,t} - R_{f,t}) + \varepsilon_{i,t}$$

と表現される。ただし、 $R_{M,t}$ は t 期におけるマーケットリターンである。また、上式のマーケットリターンを消費の成長率 $R_{C,t}$ で置き換えたものが CCAPM である。

また、マーケットリターンと消費の成長率の両方をファクターとして用いるモデル

$$R_{i,t} - R_{f,t} = \beta_{M,i} (R_{M,t} - R_{f,t}) + \beta_{C,i} (R_{C,t} - R_{f,t}) + \varepsilon_{i,t}$$

は、投資家が Epstein and Zin (1989) で提案された選好を持つ場合の Merton (1973) の ICAPM に対応する。このモデルの分析のフレームワークは Bansal and Yaron (2004) によって提案されている。

一方で、Fama and French (1993) の3ファクターモデルは、超過リターン、 SMB_t 及び HML_t をファクターとするモデルである。 SMB_t とは小型株ポートフォリオと大型株ポートフォリオのリターンの差であり、 HML_t とは、バリュー株ポートフォリオとグロース株ポートフォリオのリターンの差である。小型株とは時価総額が小さいものであり、大型株は大きいものである。また、バリュー株とは簿価時価比率が高いものであり、グロース株は低いものである。ファクターの作成方法に関する詳細は久保田・竹原 (2007) を参照されたい。このモデルにおいて、ポートフォリオのリターンは、

$$R_{i,t} - R_{f,t} = \beta_{M,i}(R_M - R_{f,t}) + \beta_{SMB,i}SMB_t + \beta_{HML,i}HML_t + \varepsilon_{i,t}$$

で表現される。どのモデルにおいても、ファクターがリターンであるためリスクプレミアム λ をそれぞれのリターンの標本平均で推定する場合もあるが、本稿では前節までに紹介された2段階推定による推定を行う。

表3は、第2節における推定量を用いてリスクプレミアムを推定した結果である。リスクプレミアムはパーセント表示であり、括弧内の値は t 値である。

はじめに、CAPMにおける結果を確認する。CAPMでは、従来のバイアス修正を行わない $\hat{\lambda}$ 以外の推定で、同じ推定値 1.3474 となった。また、これらは $\hat{\lambda}$ による推定値 1.3429 よりもそれほど大きい値ではない。これは、時系列回帰による残差の分散 σ^2 が小さいことによるものである。

次に、CCAPMにおける結果について述べる。推定方法によって大きく推定値が異なることが確認できる。特に、 $\hat{\lambda}_2^*$ を用いた場合には、 -0.51783 と負の値となっている。これは、 $\beta\beta$ の推定値が負の値となってしまっていることが原因であり、バイアス修正が機能していない。他の推定値の中では、 $\hat{\lambda}$ による推定値が 4.0305 と最も小さい値となっている。バイアス修正を行った推定値では $\hat{\lambda}_2^*$ を用いた場合に 11.1981 と大きな値となっており、 $\hat{\lambda}$ のものよりも極めて大きいことが確認できる。したがって、有限標本においては $\hat{\lambda}$ にはバイアスが残っている可能性がある。しかし、第3節での実験結果が示す通り、一概にバイアス修正を行うことが望ましいとは言えないことには注意が必要である。

続いて、ICAPMにおける結果について述べる。ICAPMにおいても $\hat{\lambda}_2^*$ のものだけ他のバイアス修正推定量と比較して修正の符号が異なっている。また、 $\hat{\lambda}_2^*$ 以外のバイアス修正推定量において、マーケットリターンに対するリスクプレミアム λ_M に関して $\hat{\lambda}$ の推定値を小さくするようなバイアス修正が行われている。そのため、 $\hat{\lambda}$ を用いた場合には t 値が 2.0544 であり、有意水準 5% で統計的に有意であったものが、バイアス修正を行ったことによって有意ではなくなっている。また、消費の成長率に対する λ_C については、 $\hat{\lambda}$ では有意ではなかったものが、バイアス修正を行った $\hat{\lambda}_2^*$ において有意となっている。

Fama-French の3ファクターモデルについても CAPM の場合と同様にバイアス修正によ

表3 各モデルに対するリスクプレミアムの推定結果

		$R_{M,t}$	$R_{C,t}$	SMB_t	HML_t
CAPM	$\hat{\lambda}(\text{OLS})$	1.3429 (1.7740)			
	$\hat{\lambda}_1^*(\text{BZ})$	1.3474 (1.7754)			
	$\hat{\lambda}_2^*$	1.3474 (1.7754)			
	$\hat{\lambda}_3^*$	1.3474 (1.7754)			
CCAPM	$\hat{\lambda}(\text{OLS})$		4.0305 (0.6296)		
	$\hat{\lambda}_1^*(\text{BZ})$		6.6103 (0.6349)		
	$\hat{\lambda}_2^*$		-5.1783 (-0.6330)		
	$\hat{\lambda}_3^*$		11.1981 (0.6370)		
ICAPM	$\hat{\lambda}(\text{OLS})$	1.2442 (2.0544)	0.9972 (0.4056)		
	$\hat{\lambda}_1^*(\text{BZ})$	1.1930 (0.6252)	1.5472 (1.9610)		
	$\hat{\lambda}_2^*$	1.6474 (2.1088)	-2.9443 (-0.8484)		
	$\hat{\lambda}_3^*$	1.1193 (1.8020)	2.2756 (0.8917)		
FF	$\hat{\lambda}(\text{OLS})$	0.9702 (2.3413)		0.4373 (1.4137)	0.3644 (0.7153)
	$\hat{\lambda}_1^*(\text{BZ})$	0.9613 (2.3242)		0.4532 (1.4720)	0.3731 (0.7366)
	$\hat{\lambda}_2^*$	0.9603 (2.3221)		0.4546 (1.4771)	0.3746 (0.7398)
	$\hat{\lambda}_3^*$	0.9609 (2.3232)		0.4539 (1.4744)	0.3738 (0.7381)

って推定値はあまり変化しなかった。

以上の結果より、1段階目の時系列回帰において十分に当てはまりが良いモデルの場合にはバイアス修正は必要ないが、そうでない場合には十分に推定結果を吟味する必要があると考えられる。

5 おわりに

本稿では、リスクプレミアムの2段階推定においてバイアス修正を行う推定量を提案し、モンテカルロ実験によって有限標本における性質を調査した。実験の結果から、バイアス修正を行うことでバイアスは小さくなるが、RMSEの観点からはバイアス修正を行わない推定量の方が優れている場合もあることが分かった。また、本稿で提案するバイアス修正と Bai and Zhou (2015) の方法の比較を比較すると、本稿の推定量の方が若干バイアスが小さいが、RMSEは大きい傾向があった。本稿で行った実験だけでは、どのような場合に、どの方法を用いるべきかという問題に対して明確な答えを得ることはできなかった。更に、これらの推定量を用いた国内株式市場における実証分析を行った。CAPMとFama-Frenchの3ファクターモデルでは、バイアス修正によって推定値はあまり変化しなかった。一方で、消費の成長率を含むモデルであるCCAPMとICAPMにおいては、バイアス修正による影響は大きく、修正方法によっても推定値が大きく異なり、検定結果も異なる場合があった。

以下では、今後の課題について述べる。本稿ではモデルの変数に過不足がないことを仮定して分析を行った。モデルに使用されるファクターによって、期待リターンの違いが完全に説明される場合であり、2段階目の回帰における決定係数が1になる場合である。アセットプライシングの文脈ではAPTが成立することに等しい。しかしながら、モデルは現実に対する近似に過ぎない。観測できるファクターでは、期待リターンの違いを完全に説明できないと考えることも自然である。この場合には、不足している変数の影響をモデルの変数が取り込んでくれる可能性があるため、バイアス修正を行わない方が良い推定となる可能性もある。ファクターに不足がある場合のバイアスの統計的性質を検証することは今後の課題である。モデルの特定化が正しいと仮定できない場合、すなわち資産間の期待リターンの違いを完全に説明するファクターの集合が観測できない場合には、複数のモデルが候補となる。複数のモデルが候補として挙げられる場合には、何らかの基準を用いてモデルを選択する必要がある。ファクターの数を多くすれば、推定量のバイアスは小さくなるが、分散は大きくなる。このようなバイアスと分散のトレードオフ関係は、統計学における主要なテーマの一つである。また、Lewellen et al. (2010) では、あるファクターの組み合わせに対して、決定係数が大きくなるのであれば、それらと相関を持つ別のファクターを用いたとしても決定係数が高くなることを示している。多くの実証研究では、2段階目の回帰分析における決定係

数をモデルの正しさを評価するための基準として用いられてきた。Kan et al. (2013) では、決定係数の漸近分布が導出されている。また、Kan and Robotti (2009) では、Hansen-Jagannathan distance を用いることによるモデル比較を提案している。これらの基準の有限標本におけるバイアスを修正することによる新たな基準の開発や、モデル選択とバイアスの関係性の調査も今後の課題と言える。

また、Campbell (1993) や Petkova (2006) では、状態変数に関する VAR モデルを推定し、推定された誤差項をファクターとするモデルを採用している。この場合には、ベータを推定する回帰分析の説明変数に観測誤差を含むことになり、2段階推定の両方の段階においてバイアス修正を行う必要がある。本稿で提案した方法や、Bai and Zhou (2015) の方法を応用することでバイアス修正を行うことも可能だと考えられる。

日本のデータを用いた実証研究には、以下のものがある。Jagannathan et al. (1998) では、人的資本のリターンの代理変数である賃金をファクターとするモデルが検証されている。また、Kubota and Takehara (2017) では、Fama and French (2015) の5ファクターモデルの推定を行い、いくつかのファクターの有意性を確認している。本稿の方法をこれらのデータに対して応用していくことも今後の課題である。

参 考 文 献

- Bai, Jushan and Guofu Zhou (2015) "Fama-MacBeth two-pass regressions: Improving risk premia estimates," *Finance Research Letters*, Vol. 15, pp. 31-40.
- Bansal, Ravi and Amir Yaron (2004) "Risks for the Long Run: A Potential Resolution of Asset Pricing Puzzles," *The Journal of Finance*, Vol. 59, No. 4, pp. 1481-1509.
- Campbell, John Y. (1993) "Intertemporal Asset Pricing without Consumption Data," *The American Economic Review*, Vol. 83, No. 3, pp. 487-512.
- Daniel, Kent and Sheridan Titman (2012) "Testing Factor-Model Explanations of Market Anomalies," *Critical Finance Review*, Vol. 1, No. 1, pp. 103-139, January.
- Epstein, Larry G. and Stanley E. Zin (1989) "Substitution, Risk Aversion, and the Temporal Behavior of Consumption and Asset Returns: A Theoretical Framework," *Econometrica*, Vol. 57, No. 4, pp. 937-969.
- Fama, Eugene F. and Kenneth R. French (1992) "The Cross-Section of Expected Stock Returns," *The Journal of Finance*, Vol. 47, No. 2, pp. 427-465.
- (1993) "Common risk factors in the returns on stocks and bonds," *Journal of Financial Economics*, Vol. 33, No. 1, pp. 3-56.
- (2015) "A five-factor asset pricing model," *Journal of Financial Economics*, Vol. 116, No. 1, pp. 1-22.
- Fama, Eugene F. and James D. MacBeth (1973) "Risk, Return, and Equilibrium: Empirical Tests," *Journal of Political Economy*, Vol. 81, No. 3, pp. 607-636.

- Jagannathan, Ravi, Keiichi Kubota, and Hitoshi Takehara (1998) "Relationship between Labor? Income Risk and Average Return: Empirical Evidence from the Japanese Stock Market," *The Journal of Business*, Vol. 71, No. 3, pp. 319-347.
- Kan, Raymond and Cesare Robotti (2009) "Model Comparison Using the Hansen-Jagannathan Distance," *The Review of Financial Studies*, Vol. 22, No. 9, pp. 3449-3490.
- Kan, Raymond, Cesare Robotti, and Jay Shanken (2013) "Pricing Model Performance and the Two-Pass Cross-Sectional Regression Methodology," *The Journal of Finance*, Vol. 68, No. 6, pp. 2617-2649.
- Kubota, Keiichi and Hitoshi Takehara (2017) "Does the Fama and French Five-Factor Model Work Well in Japan?" *International Review of Finance*, Vol. 18, No. 1, pp. 137-146.
- Lewellen, Jonathan, Stefan Nagel, and Jay Shanken (2010) "A skeptical appraisal of asset pricing tests," *Journal of Financial Economics*, Vol. 96, No. 2, pp. 175-194.
- Merton, Robert C. (1973) "An Intertemporal Capital Asset Pricing Model," *Econometrica*, Vol. 41, No. 5, pp. 867-887.
- Petkova, Ralitsa (2006) "Do the Fama? French Factors Proxy for Innovations in Predictive Variables?" *The Journal of Finance*, Vol. 61, No. 2, pp. 581-612.
- Shanken, Jay (1992) "On the Estimation of Beta-Pricing Models," *The Review of Financial Studies*, Vol. 5, No. 1, pp. 1-33.
- 久保田敬一・竹原均 (2007) 「Fama-French ファクターモデルの有効性の再検証」, 『現代ファイナンス』, 第 22 号, 3-23 頁, 9 月。