

VAR モデルの残差を説明変数として用いる 回帰分析のシミュレーション

木 下 亮

1 はじめに

本稿では VAR モデル (Vector Auto-regressive Model) における残差を説明変数として用いる場合の、回帰分析の推定量の分布に関する検証を行う。回帰分析における説明変数に、他の回帰分析の残差を用いる 2 段階推定は、計量ファイナンスの分野において用いられている。Campbell (1993), Campbell and Vuolteenaho (2004), Petkova (2006) では、今期に訪れた新規の情報、すなわち予期されていないショックとして VAR モデルの残差を採用し、それを説明変数として回帰分析を行っている。同様の方法が国内の実証研究でも用いられており、Kubota and Takehara (2011) では会計情報に対して応用している。この 2 段階推定は実証分析において広く用いられているが、その統計的性質に関する検証は十分に行われていない。最終的には理論的に統計的性質を明らかにする必要があるが、煩雑な計算が必要となるため、本稿では、準備段階としてシミュレーションによる検証を行う。

まず、1 段階目の回帰分析の残差を 2 段階目の回帰分析の説明変数として用いる 2 段階推定に関する先行研究について述べる。Pagan (1984) や Hoffman (1987) では、中心極限定理を用いて、予測値や残差を説明変数として用いる場合の回帰係数の推定量の漸近分布が導出されている。この研究での対象は $1/\sqrt{T}$ のオーダーで分布収束する項であり、高次の項は考慮されていない。予測値や残差を説明変数として用いる場合、これらは本来用いられるべき潜在変数に対する推定量であるから、有限標本の場合には観測誤差に伴う統計上の問題がある。説明変数に観測誤差がある場合、回帰分析の推定量は、不偏性や一致性といった望ましい統計的性質を満たさないことが知られている。しかし、予測値や残差は、潜在変数に対する一致推定量であることから、 $1/\sqrt{T}$ のオーダーの項に関して漸近バイアスは存在せず、漸近分散にのみ観測誤差が影響を与えるというのが Pagan (1984) の結果である。

また、説明変数が外生である場合の回帰分析におけるバイアス修正に関して、Schafer (1986) や Verbeek and Nijman (1993) で検証が行われている。Schafer (1986) では、観測誤差がある場合の極めてシンプルな回帰係数の推定方法を提案している。Verbeek and Nijman (1993) では Schafer (1986) の方法を応用し、パネル分析の場合に特定のクラスの

VAR モデルの残差を説明変数として用いる回帰分析のシミュレーション

推定量の中で MSE（平均二乗誤差）が最小となるような推定量の提案を行っている。これらの先行研究では、説明変数に対する観測誤差は恒久的なものである。予測値や残差を説明変数に用いることによる観測誤差の問題を取り扱った研究は少ない。すなわち、 $1/\sqrt{T}$ よりも速いスピードで消滅する観測誤差が存在する場合の回帰分析の漸近展開である。標本サイズが十分な場合には考慮する必要がないが、ファイナンスや経済データでは少ない標本サイズで分析を行うことも少なくない。一般論ではなく、アセットプライシングの分野であるが、この場合のバイアス修正に関する分析が行われている。Bai and Zhou (2015) では、ファクターモデルにおいて、1段階目の回帰分析の推定値を2段階目の回帰分析の説明に用いる場合の $1/T$ のオーダーに関するバイアスを導出し、バイアス修正推定量を提案している。

一方で、VAR モデルに対して最小二乗推定を行う場合には、その係数推定値にバイアスが存在することが知られている。この場合には、抽出された残差も真の誤差項に対してバイアスを持つことになる。この残差を2段階目の回帰分析に用いる場合には、説明変数の観測誤差にバイアスが存在することになる。本稿では、その修正の有無が、2段階目の推定量にどのような影響を与えるのかをシミュレーションによって検証する。具体的には、回帰分析において VAR モデルの残差を説明変数として用いる際に、通常最小二乗推定量からの残差を用いる場合と、バイアス修正を行った推定量からの残差を用いる場合の回帰係数の分布の比較である。バイアスや MSE 等のモーメントや近似分布に関する漸近展開を用いた表現は、極めて煩雑なものとなるため、本稿では取り扱わず今後の課題とする。また、VAR モデルのバイアス修正係数推定量のシミュレーションに関しても Engsted and Pedersen (2014) で2変量 VAR (1) モデルが検証されているのみであり、十分に検証が行われていない。そこで、VAR 係数推定量の分布に関しても合わせて検証を行う。

本稿の構成は以下の通りである。第2節では、本稿で用いる2段階推定のモデルと VAR モデルのバイアス修正について述べる。第3節は、複数のモデルに対するモンテカルロ・シミュレーションであり、第4節においてまとめる。

2 モデル

本節では、対象とするモデルに関する説明を行う。はじめに、1段階目の VAR モデルにおいて残差を抽出し、それらを2段階目の回帰分析の説明変数として用いるモデルを述べる。次に VAR モデルの推定量のバイアス修正について説明する。

2.1 VAR モデルの残差を説明変数として用いる回帰分析

本稿では、1段階目の VAR (1) モデルの誤差項が、2段階目の説明変数となる以下のようなモデルを考える。

$$y_t = Ay_{t-1} + u_t,$$

$$z_t = u_t' \beta + \varepsilon_t$$

ただし, $y_t = (y_{1,t}, y_{2,t}, \dots, y_{k,t})'$ とし, z_t はスカラーである。また, $u_t \sim NID(\mathbf{0}, \Sigma)$, $\varepsilon_t \sim NID(0, \omega^2)$ とする。また $\det(I_k - Az^k) = 0$ の根は全て, 単位円外にあるとする。すなわち定常な時系列を対象とする。高次の VAR モデルに関しても, 状態空間表現を用いて VAR (1) での表現が可能であるため, VAR (1) に対象を限定しても一般性は失われない。つまり, VAR (p) モデルを

$$y_t^* = \sum_{i=1}^p A_i y_{t-i}^* + u_t^*, u_t^* \sim N(\mathbf{0}, \Omega)$$

とする場合には, 以下のような $kp \times kp$ 行列

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_p \\ I_k & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_k & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & I_k \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \Omega & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

を考え, $y_t = (y_t^{*1}, y_t^{*2}, \dots, y_t^{*p})'$, $u_t = (u_t^{*1}, \mathbf{0}', \dots, \mathbf{0}')'$ として VAR (1) モデルとみなせばよい。また, A_i の (j, k) 要素を $A_{jk,i}$ と表す。2段階目の回帰分析を行うにあたって, 真の誤差項である u_t を観測することができれば, β に関する適切な推定を行うことができるが, 実際には推定値を用いることになる。VAR モデルに対して最小二乗推定を行い, その係数推定値を用いて残差を計算するのが一般的な方法である。すなわち, 最小二乗推定量を \hat{A} とし, $\hat{u}_t = y_t - \hat{A}y_{t-1}$ として残差を求める。この残差を用いて 2段階目の回帰分析 $z_t = \hat{u}_t' \beta + \varepsilon_t$ を行う場合, u_t の推定値を用いることによる観測誤差の問題が生じる。説明変数に観測誤差を含む場合, 回帰係数 β は不偏性や一致性といった望ましい統計的性質を満たさないということが知られている。しかしながら, この観測誤差は $1/\sqrt{T}$ よりも速いスピードで消滅するため, 中心極限定理によって導かれる漸近分布において, 漸近バイアスは存在しない。一方で, この観測誤差は漸近分散には影響を与えることが知られている。Pagan (1984) がこの問題に取り組んだ代表的な研究であり, 説明変数に予測を用いる場合や残差を用いる場合等のいくつかの場合分けの下に漸近分布が導かれている。Pagan (1984) では, 予測値や残差がスカラーの場合のみが分析されていたが, Hoffman (1987) において多変量の場合に拡張されている。

これらの研究では, $1/\sqrt{T}$ の項のみを対象として中心極限定理による結果のみが導出されており, 高次のオーダーに関する問題は考慮されていない。高次のオーダーに関する分析は計算が煩雑なこともあり, 本稿で対象としているような 2段階推定における先行研究は少ない。特に VAR モデルの場合には, 係数推定量にバイアスが存在するため, 観測誤差にもバ

VAR モデルの残差を説明変数として用いる回帰分析のシミュレーション

バイアスが存在することになる。高次の項を考慮した上で、バイアスや RMSE の解析的表現を導出することが理想的ではあるが、本稿では準備段階として、シミュレーションによる検証を行う。本稿の目的は、真の誤差項の代わりに残差を用いることで、 β の推定量の性質がどう変化するかを検証することである。また、残差の抽出に関しても以下で述べるバイアスの修正を考える。

2.2 VAR モデルの推定量のバイアス修正

VAR モデルの最小二乗推定量のバイアス修正に関しては、いくつかの先行研究がある。Yamamoto and Kunitomo (1984) 及び Pope (1990) では、 $1/T$ のオーダーのバイアス項が導出されている。Yamamoto and Kunitomo (1984) で導出されたバイアス項は

$$b = -\left(\Sigma \sum_{i=0}^{\infty} [(A')^i \text{tr}(A^{i+1}) + (A')^{(2i+1)}] \left[\sum_{j=0}^{\infty} A' \Sigma (A')^j \right]^{-1}\right) / T$$

である。これは、無限和を含む表現であり、実際には有限個の和で近似することになる。一方で Pope (1990) で導出された表現は

$$b = -\left(\Sigma \left[(I_k - A')^{-1} + A' (I_k - (A')^2)^{-1} + \sum_{i=1}^k \lambda_i (I_k - \lambda_i A')^{-1} \right] \Sigma_y^{-1}\right) / T \quad (2.1)$$

である。ただし、 Σ_y は y の条件なし分散共分散行列であり、 λ_i は A の固有値である。これらの 2 つの表現が同値であることは Engsted and Pedersen (2014) で証明されている。Engsted and Pedersen (2014) でも指摘されている通り、実装する上では無限和を切断する必要の無い (2.1) の方が扱いやすいため、本稿でもこちらの表現を採用する。しかしながら、(2.1) の方法は、 A の固有値を必要とするため、固有値が複素数となる場合には、複素行列の演算に関するルーチンが必要であることには注意が必要である。VAR モデルの A と Σ の推定量を最小二乗推定量を $\hat{A}_{OLS}, \hat{\Sigma}_{OLS}$ とし、 $\hat{\Sigma}_y$ は $\hat{A}_{OLS}, \hat{\Sigma}_{OLS}$ を用いた理論値 $\hat{\Sigma}_y = (I_k - \hat{A}_{OLS} \otimes \hat{A}_{OLS})^{-1} \text{vec}(\hat{\Sigma}_{OLS})$ とする。また、バイアス修正推定量を $\hat{A}_{BC} = \hat{A}_{OLS} - \hat{b}$ とする。ただし、 \hat{b} は (2.1) に最小二乗推定量を代入したプラグイン推定量である。二つの係数推定量 \hat{A}_{OLS} と \hat{A}_{BC} を用いて、それぞれ残差を計算することができる。本稿では、それぞれの残差 $\hat{u}_{i,OLS}, \hat{u}_{i,BC}$ 及び真の誤差項 u_i を用いて 2 段階目の回帰分析を行うシミュレーションを行う。

3 モンテカルロ・シミュレーション

本節では、モンテカルロ・シミュレーションにより、第 2 節で紹介した推定量の有限標本における性質を検証する。VAR モデルの係数推定量及び残差を説明変数に用いる場合の回帰分析の係数推定量の分布に関する検証を行う。

はじめに、以下の 2 変量 VAR (1) モデルを考える。

表 1 VAR モデルの係数推定値の平均と RMSE

	Average				RMSE				
	True	A_{11}	A_{12}	A_{21}	A_{22}	A_{11}	A_{12}	A_{21}	A_{22}
$T=50$	OLS	0.7510	0.1097	0.1026	0.7990	0.1400	0.1364	0.1201	0.1316
	BC	0.8254	0.1034	0.1046	0.8750	0.1307	0.1237	0.1084	0.1229
$T=100$	OLS	0.7760	0.1055	0.1002	0.8237	0.0885	0.0866	0.0773	0.0817
	BC	0.8156	0.1017	0.1011	0.8641	0.0850	0.0810	0.0721	0.0780
$T=200$	OLS	0.7879	0.1033	0.1000	0.8366	0.0590	0.0583	0.0507	0.0525
	BC	0.8083	0.1012	0.1005	0.8575	0.0577	0.0561	0.0486	0.0511
$T=500$	OLS	0.7950	0.1012	0.1003	0.8449	0.0359	0.0353	0.0309	0.0312
	BC	0.8034	0.1004	0.1005	0.8534	0.0355	0.0347	0.0303	0.0308

$$y_t = \begin{bmatrix} 0.80 & 0.1 \\ 0.1 & 0.85 \end{bmatrix} y_{t-1} + u_t, \quad u_t \sim N\left(0, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\right),$$

$$z_t = u_t' \begin{bmatrix} 2 \\ 0.8 \end{bmatrix} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N(0, 1).$$

VAR モデルは、Engsted and Pedersen (2014) における一つ目の例と同じものである。標本サイズは $T = \{50, 100, 200, 500\}$ とし、試行回数を $S = 10000$ とする。まず、VAR モデルの係数推定に関する実験結果について述べる。 s 回目の実験における各パラメータの推定値を $\widehat{A}_{ii}^{(s)}$ と表す。実験における推定値の標本平均 $1/S \sum_{s=1}^S \widehat{A}_{ii}^{(s)}$ と $\text{RMSE} = \sqrt{1/S \sum_{s=1}^S (\widehat{A}_{ii}^{(s)} - A_{ii})^2}$ をパラメータごとに計算する。

表 1 は、最小二乗推定値とバイアス修正を行った推定値に関して、推定値の平均と RMSE をパラメータごとにまとめたものである。バイアス修正を行うことで、全てのパラメータに関して、全ての標本サイズにおいてバイアスと RMSE が共に小さくなった。これらの 2 つの指標の観点からは、バイアス修正を行うことで推定の精度が改善されたと言える。推定値の平均に関しては、Engsted and Pedersen (2014) の結果とは大きく異なるものとなった。特に、最小二乗推定値の平均が異なっている。本稿と Engsted and Pedersen (2014) は、共に十分な試行回数でシミュレーションを行っており、最小二乗推定のルーチンは言うまでもなく同一であるため、ソフトウェアの乱数の違いが結果に影響を与えている可能性が考えられる。

次に、VAR モデルの残差を用いて回帰分析を行った場合の、係数推定量の性質に関して述べる。推定値の平均と RMSE に関しては、VAR 係数と同様の計算方法を用いている。表 2 は、真の誤差項 u_t を用いた場合、最小二乗推定推定量 \widehat{A}_{OLS} からの残差 $\widehat{u}_{t,OLS}$ を用いた場合、バイアス修正推定量 \widehat{A}_{BC} からの残差 $\widehat{u}_{t,BC}$ を用いた場合の回帰係数推定値 $\widehat{\beta}$ の推定値の平均と RMSE をまとめたものである。

表 2 2 段階目の回帰分析の係数推定値の平均と RMSE

		Average		RMSE	
True		β_1	β_2	β_1	β_2
		2	0.8		
T=50	u_t	1.9990	0.7993	0.1200	0.1195
	$\hat{u}_{t,OLS}$	1.9989	0.7995	0.1247	0.1242
	$\hat{u}_{t,BC}$	1.9536	0.7621	0.1617	0.1632
T=100	u_t	1.9998	0.7998	0.0826	0.0834
	$\hat{u}_{t,OLS}$	1.9997	0.7998	0.0843	0.0848
	$\hat{u}_{t,BC}$	1.9864	0.7880	0.0895	0.0907
T=200	u_t	1.9998	0.8013	0.0578	0.0586
	$\hat{u}_{t,OLS}$	1.9997	0.8012	0.0583	0.0590
	$\hat{u}_{t,BC}$	1.9961	0.7980	0.0590	0.0598
T=500	u_t	2.0003	0.7994	0.0368	0.0364
	$\hat{u}_{t,OLS}$	2.0002	0.7994	0.0369	0.0366
	$\hat{u}_{t,BC}$	1.9996	0.7988	0.0370	0.0366

先に述べた通り、このモデルでは VAR モデルの係数に関して、バイアス修正を行うことで、推定の精度が向上することが確認されている。しかしながら、2 段階目の推定において、 $\hat{u}_{t,BC}$ を説明変数として用いる場合には、 $\hat{u}_{t,OLS}$ を用いる場合と比較して、全ての標本サイズの場合に、バイアスと RMSE が小さくなることはなかった。バイアス修正を行わない方が、良い結果を得ることができるということは、 u_t の推定の精度が高いということである。バイアス修正を行った方が、VAR 係数の推定量の精度が良いにも関わらず、 u_t の推定の精度が低い理由には、係数推定量と誤差項の間に相関があることが原因として考えられる。この相関を考慮した上での u_t の推定方法の導出は今後の課題といえる。また、当然の結果であるが、真の誤差項 u_t を用いた場合に、バイアスと RMSE が最も小さくなる傾向にあった。

次に、以下の 2 変量 VAR (2) モデルを考える。

$$y_t = \begin{bmatrix} 0.30 & 0.10 \\ 0.10 & 0.40 \end{bmatrix} y_{t-1} + \begin{bmatrix} 0.20 & 0 \\ 0.10 & 0.2 \end{bmatrix} y_{t-2} + u_t, \quad u_t \sim N\left(0, \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix}\right),$$

$$z_t = u_t' \begin{bmatrix} 2 \\ 0.8 \end{bmatrix} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N(0, 1).$$

Engsted and Pedersen (2014) では、2 変量 VAR (1) モデルのみがシミュレーションの対象とされており、高次の VAR モデルに関するシミュレーションは筆者が知る限り初めてのものである。先に述べた通り、VAR (2) モデルに対しては、状態空間表現を行うことで VAR (1) 表現し、推定を行った。表 3 は、一つ目のモデルと同様に、推定方法ごとに VAR 係数推定値の平均と RMSE をパラメータごとにまとめたものである。バイアス修正を行うことで全体を通してバイアスが小さくなる傾向にあるが、パラメータによってはバイア

表 3 VAR モデルの係数推定値の平均と RMSE

True	$A_{11,1}$	$A_{12,1}$	$A_{21,1}$	$A_{22,1}$	$A_{11,2}$	$A_{12,2}$	$A_{21,2}$	$A_{22,2}$
	0.3	0.1	0.1	0.4	0.2	0.1	0	0.2
$T=50$	Average							
OLS	0.2841	0.1035	0.0990	0.3862	0.1579	0.1053	-0.0003	0.1577
BC	0.3194	0.1022	0.1012	0.4203	0.2173	0.0997	0.0037	0.2131
	RMSE							
OLS	0.1507	0.1545	0.1503	0.1532	0.1515	0.1548	0.1521	0.1526
BC	0.1532	0.1533	0.1495	0.1562	0.1551	0.1546	0.1521	0.1561
$T=100$	Average							
OLS	0.2940	0.1008	0.0989	0.3920	0.1790	0.1031	-0.0003	0.1800
BC	0.3124	0.0999	0.1002	0.4098	0.2100	0.1001	0.0019	0.2090
	RMSE							
OLS	0.1026	0.1038	0.1029	0.1033	0.1029	0.1033	0.1023	0.1021
BC	0.1037	0.1033	0.1025	0.1041	0.1047	0.1030	0.1022	0.1040
$T=200$	Average							
OLS	0.2979	0.1013	0.1001	0.3964	0.1892	0.1014	-0.0006	0.1901
BC	0.3073	0.1009	0.1007	0.4054	0.2052	0.0998	0.0006	0.2050
	RMSE							
OLS	0.0701	0.0711	0.0708	0.0699	0.0714	0.0720	0.0705	0.0705
BC	0.0706	0.0709	0.0706	0.0702	0.0721	0.0718	0.0705	0.0713
$T=500$	Average							
OLS	0.2991	0.1005	0.1001	0.3984	0.1952	0.1008	-0.0005	0.1965
BC	0.3029	0.1003	0.1003	0.4020	0.2017	0.1001	0.0000	0.2025
	RMSE							
OLS	0.0440	0.0444	0.0442	0.0446	0.0445	0.0444	0.0433	0.0441
BC	0.0442	0.0443	0.0442	0.0446	0.0446	0.0443	0.0433	0.0443

スが大きくなる場合もあった。また、RMSE に関しても、大きくなる場合も小さくなる場合もあった。これは、バイアス修正項が分散を大きくすることが原因として考えられる。特に、 $A_{11,1}$, $A_{22,1}$, $A_{11,2}$, $A_{22,2}$ といった対角要素に関しては、全ての標本サイズにおいてバイアスと RMSE の両方が大きくなった。

表 4 は、2 段階目の回帰分析において、残差の種類ごとに回帰係数推定値 $\hat{\beta}$ の推定値の平均と RMSE をまとめたものである。一つ目の場合と同様に、 $\hat{u}_{i,OLS}$ を説明変数として用いる場合には、 $\hat{u}_{i,BC}$ を用いる場合と比較して、全ての標本サイズの場合に、バイアスと RMSE が大きくなる傾向があった。

最後に以下の 3 変量 VAR (1) モデルに関するシミュレーションを行う。

表 4 2 段階目の回帰分析の係数推定値の平均と RMSE

		Average		RMSE	
True		β_1	β_2	β_1	β_2
		2	0.8		
$T=50$	u_t	1.9978	0.7988	0.1482	0.1503
	$\hat{u}_{t,OLS}$	1.9981	0.7993	0.1575	0.1600
	$\hat{u}_{t,BC}$	1.9755	0.7855	0.1651	0.1653
$T=100$	u_t	2.0022	0.7995	0.1027	0.1028
	$\hat{u}_{t,OLS}$	2.0018	0.7998	0.1055	0.1057
	$\hat{u}_{t,BC}$	1.9959	0.7962	0.1062	0.1065
$T=200$	u_t	2.0006	0.7995	0.0716	0.0714
	$\hat{u}_{t,OLS}$	2.0005	0.7992	0.0729	0.0723
	$\hat{u}_{t,BC}$	1.9990	0.7982	0.0730	0.0724
$T=500$	u_t	1.9999	0.8001	0.0450	0.0447
	$\hat{u}_{t,OLS}$	2.0000	0.8001	0.0451	0.0450
	$\hat{u}_{t,BC}$	1.9997	0.8000	0.0451	0.0450

$$y_t = \begin{bmatrix} 0.30 & 0.10 & 0.20 \\ 0.10 & 0.40 & 0.10 \\ 0.20 & 0.50 & 0.50 \end{bmatrix} y_{t-1} + u_t, \quad u_t \sim N(0, I_3),$$

$$z_t = u_t' \begin{bmatrix} 2 \\ 0.8 \\ 1.4 \end{bmatrix} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N(0, 1)$$

表 5 は、推定方法ごとに VAR 係数推定値の平均と RMSE をパラメータごとにまとめたものである。バイアス修正を行うことで、バイアスは小さくなる傾向があった。RMSE に関しては、パラメータによっては小さくも大きくもなるものもあった。また、2 つ目のモデルと同様に対角要素に関しては、全ての標本サイズにおいて RMSE が大きくなった。

表 6 は、2 段階目の回帰分析において、残差の種類ごとに回帰係数推定値 $\hat{\beta}$ の推定値の平均と RMSE をまとめたものである。先の 2 つのモデルと同様に、 $\hat{u}_{t,OLS}$ を説明変数として用いる場合には、 $\hat{u}_{t,BC}$ を用いる場合と比較して、全ての標本サイズの場合に、バイアスと RMSE が小さくなることはなかった。

本稿でシミュレーションを行った 3 つのモデルに関しては、2 段階目の回帰分析においては、 $\hat{u}_{t,BC}$ よりも $\hat{u}_{t,OLS}$ を用いた方がバイアスの観点からも RMSE の観点からも精度が高かった。本稿の結果から、一概に $\hat{u}_{t,OLS}$ を用いるべきであるということとはできないが、傾向を確認することはできた。今後は、バイアス項や MSE の解析的表現や更に詳細なシミュレーションによる検証が期待される。

表 5 VAR モデルの係数推定値の平均と RMSE

True	A_{11}	A_{21}	A_{31}	A_{12}	A_{22}	A_{32}	A_{13}	A_{23}	A_{33}
	0.3	0.1	0.2	0.1	0.4	0.5	0.2	0.1	0.5
$T=50$	Average								
OLS	0.2693	0.0988	0.1994	0.0981	0.3687	0.5003	0.1988	0.0895	0.4744
BC	0.3203	0.1039	0.2035	0.0999	0.4219	0.4949	0.2024	0.1110	0.5205
	RMSE								
OLS	0.1381	0.1409	0.1414	0.1435	0.1419	0.1409	0.1112	0.1113	0.1124
BC	0.1443	0.1394	0.1403	0.1417	0.1456	0.1398	0.1098	0.1109	0.1167
$T=100$	Average								
OLS	0.2839	0.0996	0.1988	0.1006	0.3842	0.5015	0.1999	0.0934	0.4882
BC	0.3107	0.1024	0.2009	0.1015	0.4122	0.4983	0.2015	0.1048	0.5121
	RMSE								
OLS	0.0963	0.0952	0.0960	0.0961	0.0966	0.0966	0.0741	0.0743	0.0746
BC	0.0985	0.0946	0.0955	0.0954	0.0980	0.0962	0.0735	0.0741	0.0765
$T=200$	Average								
OLS	0.2927	0.0991	0.2003	0.1014	0.3919	0.5013	0.1993	0.0970	0.4935
BC	0.3064	0.1006	0.2013	0.1018	0.4063	0.4997	0.2001	0.1028	0.5056
	RMSE								
OLS	0.0663	0.0659	0.0669	0.0666	0.0676	0.0667	0.0514	0.0515	0.0514
BC	0.0672	0.0656	0.0668	0.0663	0.0681	0.0665	0.0512	0.0514	0.0520
$T=500$	Average								
OLS	0.2971	0.1003	0.2006	0.0998	0.3969	0.5004	0.1998	0.0988	0.4974
BC	0.3027	0.1008	0.2010	0.1000	0.4027	0.4997	0.2001	0.1011	0.5023
	RMSE								
OLS	0.0416	0.0418	0.0421	0.0421	0.0423	0.0420	0.0322	0.0318	0.0318
BC	0.0418	0.0418	0.0420	0.0420	0.0424	0.0419	0.0322	0.0317	0.0319

4 おわりに

本稿では、1段階目のVARモデルにおける残差を2段階目の回帰分析の説明変数として用いる場合の推定量の性質をシミュレーションによって検証した。VARモデルの残差を抽出する際には、最小二乗係数推定量とそのバイアス修正を行った係数推定量を用いた。この際に、VAR推定量のバイアス修正には、Yamamoto and Kunitomo (1984) 及び Pope (1990) で導出された $1/T$ のオーダーのバイアス項のプラグイン推定量を用いた。2変量VAR(1)モデルの場合には、VAR係数推定量にバイアス修正を行うことで、バイアスとRMSEの両方が小さくなった。しかし、2変量VAR(2)モデルや3変量VAR(1)モデルにおいては、バイアスとRMSEが一様に改善されることはなく、パラメータによって悪化するものもあった。特に、対角要素の推定量はバイアスとRMSEが大きくなった。また、

表 6 2 段階目の回帰分析の係数推定値の平均と RMSE

		Average			RMSE		
		β_1	β_2	β_3	β_1	β_2	β_3
	True	2	0.8	1.4			
$T=50$	u_t	1.9980	0.7993	1.4007	0.1481	0.1505	0.1488
	$\hat{u}_{t,OLS}$	1.9918	0.7967	1.3964	0.1569	0.1601	0.1581
	$\hat{u}_{t,BC}$	1.9770	0.7802	1.3802	0.1619	0.1659	0.1633
$T=100$	u_t	2.0020	0.7999	1.4005	0.1030	0.1012	0.1030
	$\hat{u}_{t,OLS}$	1.9990	0.7993	1.3988	0.1060	0.1044	0.1059
	$\hat{u}_{t,BC}$	1.9952	0.7945	1.3945	0.1066	0.1054	0.1068
$T=200$	u_t	2.0009	0.8002	1.4003	0.0715	0.0718	0.0724
	$\hat{u}_{t,OLS}$	1.9993	0.7998	1.3992	0.0725	0.0729	0.0732
	$\hat{u}_{t,BC}$	1.9983	0.7985	1.3982	0.0726	0.0730	0.0734
$T=500$	u_t	2.0006	0.8004	1.3998	0.0450	0.0450	0.0448
	$\hat{u}_{t,OLS}$	2.0001	0.8001	1.3994	0.0451	0.0452	0.0450
	$\hat{u}_{t,BC}$	1.9999	0.7999	1.3992	0.0451	0.0452	0.0450

バイアス修正を行うことで係数推定量の分散が大きくなり、バイアスが小さくなくても RMSE が大きくなる場合がある。これは、バイアス修正を行う際の一般的な現象である。更に高次の項のバイアスを考慮するか、ブートストラップ法を用いたバイアスの修正を行えば、本稿のものよりも良い結果を得られる可能性がある。

また、2 段階目の回帰分析においては、VAR 係数推定量にバイアス修正を行わずに求めた残差を用いた方が、バイアスと RMSE の両方が大きくなった。この原因としては、VAR モデルの係数推定量と誤差項の間の相関が考えられる。本稿の結果を通じて、VAR 係数の推定の精度が、誤差項の推定の精度に直結しないことが分かった。この相関を考慮した誤差項の推定は今後の課題である。

アセットプライシングの実証分野では、残差を説明変数として用いるような回帰分析が広く行われている。Campbell and Vuolteenaho (2004), Petkova (2006) では、1 段階目の推定で VAR モデルの残差を求め、2 段階目の回帰分析において残差を説明変数としてファクターモデルのベータを求める。更に、3 段階目の回帰分析では 2 段階目で推定したベータを説明変数としてリスクプレミアムの推定を行う。したがって、推定誤差の問題が複数の段階に渡って生じることになる。このような 3 段階推定を用いた研究の多くでは、GMM 法によるアドホックな推定と検定が行われている。本稿の研究の延長として、このような複数段階で説明変数に推定値を用いる場合の推定量の検証が考えられる。特に、リスクプレミアムの推定に関しては、Pagan (1984) での仮定を満たさない場合もあり、アセットプライシングモデル特有の構造を統計モデルに組み込む場合もある。これらの事情を考慮しながら、推定誤差がバイアスや RMSE 及び漸近分布に与える影響を理論的に明らかにしていくことは今

後の課題である。

附記 本稿は東京経済大学 2018 年度共同研究助成費（研究番号：D18-01）による研究成果の一部である。

参 考 文 献

- Bai, Jushan and Guofu Zhou (2015) "Fama-MacBeth two-pass regressions: Improving risk premia estimates," *Finance Research Letters*, Vol. 15, pp. 31-40.
- Campbell, John Y. (1993) "Intertemporal asset pricing without consumption data," *The American Economic Review*, Vol. 83, No. 3, pp. 487-512.
- Campbell, John Y. and Tuomo Vuolteenaho (2004) "Bad Beta, Good Beta," *American Economic Review*, Vol. 94, No. 5, pp. 1249-1275.
- Engsted, Tom and Thomas Q. Pedersen (2014) "Bias-correction in vector autoregressive models: A simulation study," *Econometrics*, Vol. 2, No. 1, pp. 45-71.
- Hoffman, Dennis L. (1987) "Two-Step generalized least squares estimators in multi-equation generated regressor models," *The Review of Economics and Statistics*, Vol. 69, No. 2, pp. 336-346.
- Kubota, Keiichi and Hitoshi Takehara (2011) "Market efficiency, role of earnings information, and stock returns: A vector autoregressive model approach," *The Japanese Accounting Review*, Vol. 1, No. 2011, pp. 17-37.
- Pagan, Adrian (1984) "Econometric issues in the analysis of regressions with generated regressors," *International Economic Review*, Vol. 25, No. 1, pp. 221-247.
- Petkova, Ralitsa (2006) "Do the Fama-French factors proxy for innovations in predictive variables?" *The Journal of Finance*, Vol. 61, No. 2, pp. 581-612.
- Pope, Alun Lloyd (1990) "Biases of estimators in multivariate non-gaussian autoregressions," *Journal of Time Series Analysis*, Vol. 11, No. 3, pp. 249-258.
- Schafer, Daniel W. (1986) "Combining information on measurement error in the errors-in-variables model," *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 81, No. 393, pp. 181-185.
- Verbeek, Marno and Theo Nijman (1993) "Minimum MSE estimation of a regression model with fixed effects from a series of cross-sections," *Journal of Econometrics*, Vol. 59, No. 1, pp. 125-136.
- Yamamoto, Taku and Naoto Kunitomo (1984) "Asymptotic bias of the least squares estimator for multivariate autoregressive models," *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, Vol. 36, No. 3, pp. 419-430.