ソートポートフォリオを用いる場合のリスクプレミアムの２段階推定に関するシミュレーション

木　下　　　亮

1　はじめに

株式等のリスク資産には，安全資産よりも高い収益率が期待できるが，それに伴ってリスクが大きくなる。リスクとリターンのトレードオフのモデル化と推定は実証ファイナンスの主要なテーマの一つである。多資産を対象としてポートフォリオを構成する場合に，各資産の個別要因による変動は分散投資によって排除することができる。一方で共通変動によるリスクは，十分に分散投資を行ったとしても排除することができない。したがって，このリスクを負担する投資家には相応の追加的な期待収益率（リスクプレミアム）がもたらされるはずである。そうでなければ，誰もこれらのリスクを負担しようとしない。共通変動によるリスクはシステマティックリスクと呼ばれ，資産価格理論の主要な分析対象である。APT（Ross（1976））によって示唆される帰結は以下の通りである。多数の資産が存在する場合に，各資産のリスクは共通のファクターへの感応度（ベータ）によって測定される。均衡ではリスクとリターンにトレードオフ関係が生じるため，期待収益率はベータによって完全に説明されることになる。そうでなければ，上手くポートフォリオを組むことで裁定取引が可能となってしまう。また，これらの帰結は投資家の選好からの解釈とも整合的である。例えば，景気をファクターとみなす場合を考える。景気が悪化することに伴って収益率も低下するような資産は高リスクであると考えられ，その埋め合わせとして期待収益率も高くなるはずである。分散投資によって個別要因の影響が排除されており，かつ共通要因である景気変動の影響を受けないようなポートフォリオには超過収益率が存在しないはずであり，そのためにはリスクとリターンの間に完全なトレードオフが成立しなければならない。市場が完備で競争的であれば，上記の関係性は成立するはずである。しかし，現実の市場では資産の収益率の確率分布は未知である。また，完備市場を近似できるほと資産の数が大きくないかもしれない。したがって，統計的推測を基にモデルの検証を行う必要がある。

リスクプレミアムの推定にあたって，２段階推定が一つの方法である。データから興味のあるファクターへのベータを適切に推定することができれば，その推定値を説明変数とする回帰分析によってリスクプレミアムを推定できる。第１段階で個別資産のファクターに対する時系列回帰分析によってベータを推定し，第２段階で各資産の平均収益率をベータの推定

値に対してクロスセクション回帰分析を行うのが２段階推定である。２段階推定は必ずしも最も効率的な推定方法ではないが，Shanken（1992）や Ang et al.（2020）で示されているように漸近的な性質に関しては他の効率的な推定量と大きな違いはない。また，２段階推定における推定値は，効率的な推定方法であるが数値計算を必要とする最尤法の初期値として用いられることもある。特に，資産数が多い場合にはパラメータの数も多くなるため，尤度関数の最適化は実質的に不可能である。このような事情から，実用的には２段階推定を採用することも少なくない。第２段階の推定において，説明変数に真のベータではなく推定値を用いることになるため，観測誤差の問題が生じる。この観測誤差は，漸近的には消滅するが小標本においてバイアスをもたらす。多くの研究が小標本バイアスに関して言及しているが，その性質は十分に検証されていない。

リスクプレミアムの推定では，個別株式よりもポートフォリオが用いられることが多い。Jensen et al.（1972）では，推定されたベータに基づいて株式を順位付け，それらを用いてグループ分けを行ってポートフォリオを作成する。この方法では，ベータの散らばりを確保することができ，ポートフォリオを用いることで感応度の推定誤差を減少させることができる。Fama and French（1993）では，時価総額と簿価時価比率を用いて個別株式を 25 のグループに分けて分析対象としている。ファクターへのベータがこれらの指標と相関を持っていることを想定し，ベータの代理変数として用いるのである。代理変数としての妥当性は資産価格理論や企業価値評価モデルから以下のように正当化される。APT が成立する場合には，ベータが高ければ将来キャッシュフローに対する割引率が高くなる。したがって，割引現在価値法に基づく価値評価モデルにしたがえば，時価総額と簿価時価比率が低くなることになる。Fama and French（1993）の方法では，時価総額と簿価時価比率に関係するファクターである SMB と HML へのベータに関しては，ポートフォリオ間で十分に散らばりを持つが，市場リターンへのベータは平均化されて散らばりを持たない可能性がある。この場合の推定量の挙動は十分に検証される必要がある。

本研究の目的は，２段階推定における小標本特性をシミュレーションによって確認することである。理論的に性質を明らかにした上で，シミュレーションによって有限標本における統計的性質を確認するのが理想的ではあるが，数式展開が煩雑になるため現段階は困難である。先行研究において，理論的性質が明らかにされていない原因も煩雑さによるものだと考えられる。本研究では，性質を明らかにするための足掛かりとなる研究としてシミュレーションによる検証を行う。

本稿の構成は以下の通りである。第２節では，ファクターモデル関して説明する。第３節では，２段階推定とリスクプレミアムの推定量のバイアスについて述べる。第４節ではソートポートフォリオについて述べる。第５節はバイアス修正とソートポートフォリオに関するシミュレーションであり，第６節でまとめる。

2　モデル

資産 i の t 期の収益率は

$$R_{i,t} = \alpha_i + f_t'\beta_i + \varepsilon_{i,t} \tag{2.1}$$

として生成されると仮定する。ただし，f_t は $k\times 1$ の共通変動をもたらすベクトルであり，β_i はファクターに対する資産 i の感応度，$\varepsilon_{i,t}$ は固有の変動をもたらす変数，α_i は定数項である。ベクトルを用いた表現では，$R_t=\alpha+\beta f_t+\varepsilon_t$ となる。ただし，$R_t=(R_{1t}, R_{2t}, \cdots, R_{Nt})'$，$\alpha=(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_N)'$，$\varepsilon_t=(\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2t}, \cdots, \varepsilon_{Nt})'$ であり，β は $N\times K$ の行列 $\beta=(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_N)'$ である。また，$\lambda_0=1/N\sum_{i=1}^{N}\alpha_i$ とする。更に，行列を用いて $R=1_T\alpha'+F\beta'+\varepsilon$ と表す。ただし，R は $T\times N$ の行列 $R=(R_1, R_2, \cdots, R_T)'$，$F$ は $T\times K$ の行列 $F=(f_1, f_2, \cdots, f_T)'$，$\varepsilon$ は $T\times N$ の行列 $\varepsilon=(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_T)'$ である。APT における無裁定状態を仮定するとき，ファクター f_t の要素が全て収益率であれば，期待収益率は $E[R_{i,t}]=E[f_t']\beta_i$ となる。すなわち，$\alpha_i=0$ である。この場合には，リスクプレミアムである f_t の期待値は，f_t に対する統計分析で推定することができる。最も標準的な方法は，f_t の過去の時間平均を推定値とする方法である。ファクターにマクロ経済変数等の収益率以外の変数が含まれる場合には，必ずしも $\alpha_i=0$ とはならない。そのファクターと完全に相関するポートフォリオを見つけることができれば上記の方法に持ち込むことができる。APT では無数の資産が存在し，このようなポートフォリオを組成できることが仮定されている。しかし，現実の市場では，資産数は有限であるため，統計分析による近似が必要になる。その際のリスクプレミアムである λ の推定が本稿における分析対象である。次節に述べる 2 段階推定は，その方法の一つである。

2 段階推定の説明に入る前に，真の β が既知である場合のリスクプレミアムの推定について述べる。収益率 R_t の β への射影 $(\beta'M_N\beta)^{-1}\beta'M_NR_t$ を考える。ただし，$M_N=I_N-1_N(1_N'1_N)^{-1}1_N'$ である。式（2.1）を代入して整理すれば，資産数 N が十分に大きい場合か，σ_i^2 が十分に小さければ，f_t が収益率である場合には，それらは $(\beta'M_N\beta)^{-1}\beta'M_NR_t$ によって複製されることが確認できる。更に，f_t が収益率ではない場合には，そのファクターに対してのみ感応度を持つようなポートフォリオが得られる。本研究の対象は $\lambda_1=E[(\beta'M_N\beta)^{-1}\beta'M_NR_t]$ の推定である。また，$(\beta'M_N\beta)^{-1}\beta'M_N$ の各行の合計がゼロとなることから，それらは構築費用がゼロであるようなポートフォリオウェイトと解釈することができる。ファクターへの真の回帰係数 β が既知であれば，各資産の収益率の標本平均を β に対してクロスセクション回帰を行うことで適切なリスクプレミアムが推定される。これは，$(\beta'M_N\beta)^{-1}\beta'M_NR_t$ の時間平均と同等であり，リスクプレミアム λ_1 に対して不偏かつ効率的な推定量である。

先に述べたように，ファクターが収益率である場合には，その平均をリスクプレミアムの

推定値として用いることができる。ファクターモデルが正しい場合には，これは最良推定量となる。しかし，Frazzini and Pedersen（2014）で提案されたような均衡において α が β の関数となるような場合には，β リスクによるプレミアムとファクターの期待値が一致しない。ファクターが収益率であったとしても，このような場合にもクロスセクション回帰による推定は有用である。

3　２段階推定とバイアス

２段階推定では，真の β の代わりに時系列回帰によって得られた推定値 $\hat{\beta}$ を用いて回帰分析を行う。第１段階において，個別資産の収益率をファクターに回帰することで，β の推定値 $\hat{\beta}$ を得る。第２段階において，各資産の平均収益率 $\overline{R}$ を推定された $\hat{\beta}$ と定数項に対してクロスセクション回帰を行う。推定量は，

$$\hat{\lambda}_1 = (\hat{\beta}' M_N \hat{\beta})^{-1} \hat{\beta}' M_N \overline{R} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} (\hat{\beta}' M_N \hat{\beta})^{-1} \hat{\beta}' M_N R_t \tag{3.1}$$

である。また，$\hat{\lambda}_0 = 1_N'\overline{R} - 1_N'\hat{\beta}\hat{\lambda}_1/\mathrm{N}$ である。説明変数に真の β を用いることができれば，通常の回帰分析であり，$\hat{\lambda}_1$ は不偏かつ一致推定量となる。真の β の代わりに $\hat{\beta}$ が用いられる場合には，推定量の性質は観測誤差による影響を受ける。このとき，$\hat{\lambda}_1$ は $T^{-1/2}$ のオーダーで漸近不偏推定量ではあるが，Litzenberger and Ramaswamy（1979）や Bai and Zhou（2015）で示されているように T^{-1} のオーダーでバイアスが生じる。これを考慮すると，バイアス修正推定量は

$$\hat{\lambda}_1^* = \hat{\lambda}_1 + \left(\hat{\beta}' M_N \hat{\beta} - \left(\sum_{i=1}^{n} \hat{\sigma}_i^2\right)(F' M_K F)^{-1}\right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^{n} \hat{\sigma}_i^2\right)(F' M_K F)^{-1} \hat{\lambda}_1$$

と表すことができる。また，$\hat{\lambda}_0^* = 1_N'\overline{R} - 1_N'\hat{\beta}\hat{\lambda}_1^*/N$ である。，これは評価関数

$$\min_{\lambda_0, \lambda_1} (\overline{R} - \lambda_0 - \hat{\beta}\lambda_1)'(\overline{R} - \lambda_0 - \hat{\beta}\lambda_1) - \lambda_1'\left(\sum_{i=1}^{n} \hat{\sigma}_i^2\right)(F' M_K F)^{-1} \lambda_1$$

を用いた罰則付き回帰分析の解と同一であり，一般的な統計分析において観測誤差がある場合の標準的な修正推定量となる。リスクプレミアムの２段階推定では，１段階目と２段階目の両方で被説明変数である各資産の収益率を用いるため，収益率 $\hat{\beta}$ の推定誤差と２段階目の誤差項 $\bar{\varepsilon}$ が相関を持つが，これは T^{-1} のオーダーまでにおいてはバイアスをもたらさない。これは Bai and Zhou（2015）において証明されている。

4　ソートポートフォリオ

Jensen et al.（1972）や Fama and French（1993）に代表されるリスクプレミアムの推定

では，個別株式を何らかの特徴を表す変数をもとに順位付けを行って複数のポートフォリオを作成し，それらの収益率を分析の対象としている。その変数が β と相関を持っていれば，ポートフォリオ間で β が散らばりを持つことなり，期待収益率の違いと合わせてリスクプレミアムを推定できる。しかし，変数と相関のない β に関しては，平均化されてポートフォリオ間で散らばりが生じない。この場合には，第 2 段階において説明変数となる β に十分な変動がないためリスクプレミアムの推定は困難である。Jensen et al.（1972）は，推定された $\hat{\beta}$ を昇順に並べ，各分位の株式からなるポートフォリオを作成することで，β の散らばりを確保できるデータセットを作成している。彼らは，CAPM における推定を対象としており，市場リターンのみがファクターとなっている。Fama and French（1993）では，時価総額（Size）と簿価時価比率（B/M）を用いて株式を並べ替え，分位点で区切ってポートフォリオを作成している。区切られた区間の直積を考えることで，Size と B/M の両方で分割してポートフォリオを作成することができる。例えば，Size で株式を 2 つのグループに分類し，B/M で 3 つに分類した場合には 2×3 のポートフォリオが作成される。この方法は，Size と B/M に関してそれぞれ独立に分類を行ってポートフォリオを作成する方法であり，独立ソートと呼ばれる。一方で，Size ソートによる分類を所与として，それぞれのグループ内で B/M を用いてソートポートフォリオを作成する方法は逐次ソートと呼ばれる。後者の方法では，欠損値が生じにくいが，第一段階のソートに用いられた変数の影響を適切に評価できない可能性がある。いずれの場合でも，各ポートフォリオにおいて十分な資産数がある場合には，Size と B/M 以外の特徴が平均化されるため，それらと相関の無い β も平均化される。したがって，ポートフォリオ間で β に十分な散らばりが生じないことになる。これが有限標本においてリスクプレミアムの推定量 $\hat{\lambda}_1$ に下方バイアスを生じさせることになる。また，リスクプレミアムが過少に推定されるため，必然的にゼロベータ収益率が過大に推定される。β の散らばりが大きく，N が大きければ，このバイアスは小さくなる。上述の通り，ポートフォリオを分析対象とする場合には，個別株式を用いる場合と比べ β の散らばりが小さくなってバイアスが大きくなる。しかし，個別株式を用いる場合には継続して収益率を観測できた株式のみを用いて分析を行うことになる。上場廃止などによって生じる欠損値が推定量に影響を与える可能性もある。これらを踏まえた上でリスクプレミアムを推定するためには，欠損値に関する適切なモデル化と推定が必要となる。これは重要な問題ではあるが，本稿の範囲を越える。

本稿では，ソートポートフォリオを分析対象とし，その構成がリスクプレミアムの推定に与える影響をシミュレーションによって調査する。

5　シミュレーション

各株式の特徴を表す x と β に相関を持たせて乱数を生成し，その上で（2.1）に従って収益率を生成する。このとき，x を基にソートポートフォリオを作成した場合のリスクプレミアムの推定量の性質をシミュレーションによって検証する。具体的には $\beta_i=i/n$, $i=1,2,\cdots,2000$ とし，$x=\rho^2\beta_i+\sqrt{1-\rho^2}+\eta_i^2$ として，相関を持たせた上で乱数を生成する。ただし，η_i^2 は平均がゼロであり分散が β_i と同じである正規分布に従う乱数である。2000 個の株式を x に基づいてグループ分けを行って，N^* 個のポートフォリオを作成する。ただし，$N^*=(25,100,500,2000)$ とする。また，$\mu_f=0.5,\sigma_f^2=2,\sum=I,\alpha_i=0,\ \forall\, i$ とする。これは，β を GDP 成長率や市場リターン等に関する感応度とし，Size や B/M 等の β と相関を持つ変数でソートポートフォリオを作成する場合を想定したものである。はじめに，β と x が無相関（$\rho=0$）である場合を考える。表１と表２は，シミュレーションの集計結果を表したものであり，表１は実験の推定値の平均値を，表２は RMSE を表す。この場合には，従来の推定量である $\hat{\lambda}_1$ とバイアス修正推定量 $\hat{\lambda}_1^*$ の両方に関して，平均値と RMSE は共に N^* に影響を受けないことが確認された。また，T が大きくなるにつれて，バイアスと RMSE は減少している。リスクプレミアムの推定値に関して，$\hat{\lambda}_1^*$ の方がバイアスが小さいが，RMSE が大きい傾向にあることが確認された。ゼロベータリターンの推定値に関しては，バイアス修正推定量である $\hat{\lambda}_0^*$ の方がバイアスも RMSE も小さい傾向にあることが確認された。$T=12$ かつ $N^*=25$ の場合には，バイアス修正推定量の RMSE が極めて大きくなっており，小標本における何らかの性質が反映されていると考えられる。

表１　推定値の平均（$\rho=0$）

$N^*=$	25	100	500	2000	25	100	500	2000
		$\hat{\lambda}_1$				$\hat{\lambda}_1^*$		
$T=12$	0.321	0.318	0.319	0.319	0.410	0.409	0.407	0.406
24	0.396	0.396	0.392	0.392	0.484	0.472	0.466	0.465
48	0.444	0.446	0.445	0.446	0.499	0.495	0.492	0.493
96	0.477	0.477	0.478	0.478	0.507	0.503	0.503	0.503
192	0.487	0.485	0.484	0.484	0.502	0.499	0.498	0.498
384	0.491	0.491	0.491	0.491	0.499	0.498	0.498	0.498
		$\hat{\lambda}_0$				$\hat{\lambda}_0^*$		
$T=12$	0.096	0.098	0.097	0.097	0.051	0.052	0.053	0.053
24	0.052	0.053	0.054	0.054	0.008	0.014	0.018	0.018
48	0.031	0.030	0.030	0.030	0.003	0.005	0.007	0.007
96	0.016	0.016	0.015	0.015	0.001	0.003	0.003	0.003
192	0.006	0.007	0.008	0.008	-0.001	0.000	0.001	0.001
384	0.004	0.004	0.004	0.004	0.000	0.000	0.000	0.000

表２　推定値の RMSE（ρ=0）

$N^* =$	25	100	500	2000	25	100	500	2000
		$\hat{\lambda}_1$				$\hat{\lambda}_1^*$		
$T = 12$	0.388	0.347	0.336	0.334	0.925	0.376	0.355	0.352
24	0.297	0.270	0.261	0.260	0.335	0.288	0.274	0.271
48	0.211	0.192	0.186	0.185	0.225	0.201	0.193	0.191
96	0.153	0.139	0.136	0.135	0.159	0.144	0.139	0.138
192	0.115	0.102	0.099	0.098	0.118	0.104	0.100	0.099
384	0.081	0.073	0.071	0.071	0.082	0.073	0.071	0.071
		$\hat{\lambda}_0$				$\hat{\lambda}_0^*$		
$T = 12$	0.158	0.139	0.133	0.132	0.423	0.105	0.089	0.086
24	0.093	0.071	0.067	0.066	0.093	0.048	0.032	0.029
48	0.064	0.041	0.035	0.033	0.062	0.029	0.016	0.011
96	0.042	0.025	0.018	0.017	0.042	0.020	0.010	0.006
192	0.029	0.015	0.010	0.008	0.030	0.014	0.006	0.004
384	0.021	0.010	0.006	0.005	0.021	0.009	0.004	0.002

表３　推定値の平均（ρ=0.5）

$N^* =$	25	100	500	2000	25	100	500	2000
		$\hat{\lambda}_1$				$\hat{\lambda}_1^*$		
$T = 12$	0.499	0.463	0.379	0.319	0.507	0.491	0.444	0.406
24	0.498	0.481	0.434	0.392	0.503	0.498	0.482	0.465
48	0.503	0.495	0.470	0.446	0.506	0.504	0.498	0.493
96	0.507	0.503	0.491	0.478	0.509	0.508	0.506	0.503
192	0.499	0.497	0.491	0.484	0.500	0.499	0.499	0.498
384	0.498	0.497	0.494	0.491	0.499	0.499	0.498	0.498
		$\hat{\lambda}_0$				$\hat{\lambda}_0^*$		
$T = 12$	0.007	0.025	0.067	0.097	0.003	0.011	0.034	0.053
24	0.001	0.010	0.034	0.054	-0.001	0.001	0.009	0.018
48	0.001	0.006	0.018	0.030	0.000	0.001	0.004	0.007
96	0.001	0.003	0.009	0.015	0.000	0.000	0.001	0.003
192	0.000	0.001	0.004	0.008	0.000	0.000	0.000	0.001
384	0.000	0.001	0.002	0.004	0.000	0.000	0.000	0.000

表 3 と表 4 は，ρ=0.5 の場合のシミュレーションの集計結果を表したものである。この場合には，リスクプレミアムの推定量の両方において，ポートフォリオ数 N^* を小さくするにつれて，バイアスが低下する傾向にあることが確認できる。一方で，RMSE は上昇する傾向にある。また，バイアス修正推定量 $\hat{\lambda}_1^*$ の方がバイアスが小さく，RMSE が大きい傾向にあることが確認された。ゼロベータリターンの推定量に関しては，N^* を小さくするにつれてバイアスが小さくなり，RMSE も小さくなる傾向にあることが確認された。また，

表４　推定値の RMSE（ρ=0.5）

$N^* =$	25	100	500	2000	25	100	500	2000
		$\hat{\lambda}_1$				$\hat{\lambda}_1^*$		
$T=12$	0.429	0.400	0.352	0.334	0.435	0.417	0.378	0.352
24	0.301	0.291	0.269	0.260	0.303	0.299	0.284	0.271
48	0.201	0.197	0.189	0.185	0.202	0.200	0.196	0.191
96	0.142	0.140	0.137	0.135	0.142	0.142	0.140	0.138
192	0.100	0.100	0.099	0.098	0.100	0.100	0.100	0.099
384	0.071	0.071	0.071	0.071	0.071	0.071	0.071	0.071
		$\hat{\lambda}_0$				$\hat{\lambda}_0^*$		
$T=12$	0.027	0.043	0.094	0.132	0.026	0.033	0.061	0.086
24	0.019	0.021	0.043	0.066	0.019	0.019	0.021	0.029
48	0.012	0.013	0.022	0.033	0.012	0.012	0.011	0.011
96	0.009	0.009	0.011	0.017	0.009	0.009	0.007	0.006
192	0.006	0.006	0.007	0.008	0.006	0.006	0.005	0.004
384	0.004	0.004	0.004	0.005	0.004	0.004	0.004	0.002

表５　推定値の平均（ρ=1）

$N^* =$	25	100	500	2000	25	100	500	2000
		$\hat{\lambda}_1$				$\hat{\lambda}_1^*$		
$T=12$	0.508	0.497	0.442	0.319	0.511	0.505	0.479	0.406
24	0.500	0.495	0.469	0.392	0.501	0.500	0.492	0.465
48	0.505	0.503	0.489	0.446	0.506	0.505	0.503	0.493
96	0.508	0.507	0.500	0.478	0.508	0.508	0.507	0.503
192	0.500	0.499	0.496	0.484	0.500	0.500	0.499	0.498
384	0.498	0.498	0.497	0.491	0.499	0.499	0.498	0.498
		$\hat{\lambda}_0$				$\hat{\lambda}_0^*$		
$T=12$	0.002	0.008	0.035	0.097	0.001	0.004	0.017	0.053
24	0.000	0.003	0.016	0.054	0.000	0.001	0.004	0.018
48	0.000	0.002	0.008	0.030	0.000	0.000	0.002	0.007
96	0.000	0.001	0.004	0.015	0.000	0.000	0.001	0.003
192	0.000	0.000	0.002	0.008	0.000	0.000	0.000	0.001
384	0.000	0.000	0.001	0.004	0.000	0.000	0.000	0.000

バイアス修正推定量 $\hat{\lambda}_0^*$ の方がバイアスも小さく，RMSE も小さい傾向にあることが確認された。

β_1 と x が完全相関 (ρ=1) である場合には，β そのものでソートしていることになり，β が観測可能な場合には，Jensen et al.（1972）の方法に帰着する。ただし，実証分析において β は観測不可能であるため，Jensen et al.（1972）では推定された β でのソートが行われていることには注意が必要である。この場合にはリスクプレミアムの推定量に関して，

表６　推定値の RMSE（ρ=1）

$N^*=$	25	100	500	2000	25	100	500	2000
	$\hat{\lambda}_1$				$\hat{\lambda}_1^*$			
$T=12$	0.436	0.425	0.384	0.334	0.437	0.431	0.405	0.352
24	0.300	0.297	0.283	0.260	0.300	0.299	0.292	0.271
48	0.201	0.200	0.195	0.185	0.201	0.201	0.198	0.191
96	0.141	0.141	0.139	0.135	0.141	0.141	0.141	0.138
192	0.100	0.100	0.099	0.098	0.100	0.100	0.100	0.099
384	0.071	0.071	0.071	0.071	0.071	0.071	0.071	0.071
	$\hat{\lambda}_0$				$\hat{\lambda}_0^*$			
$T=12$	0.015	0.019	0.052	0.132	0.015	0.017	0.033	0.086
24	0.010	0.011	0.022	0.066	0.010	0.010	0.012	0.029
48	0.007	0.007	0.011	0.033	0.007	0.007	0.007	0.011
96	0.005	0.005	0.007	0.017	0.005	0.005	0.005	0.006
192	0.004	0.004	0.004	0.008	0.004	0.004	0.004	0.004
384	0.002	0.002	0.003	0.005	0.002	0.002	0.002	0.002

ρ=0.5 の場合よりも N^* を小さくすることによるバイアスの減少が，より顕著に確認された。また，RMSE は ρ=0.5 の場合よりも大きくなる傾向が確認された。ゼロベータリターンの推定量に関しては，ρ=0.5 の場合よりもバイアスも RMSE も小さくなる傾向が確認された。

６　おわりに

本稿ではリスクプレミアムの２段階推定量とバイアス修正推定量に関して，ポートフォリオ数とバイアス修正の観点からシミュレーションを行った。ソートに用いる変数とベータが相関を持つ場合には，ポートフォリオ数を減らし，ポートフォリオ内の資産数を増やすことでバイアスが減少する傾向にあることが確認された。また，バイアス修正推定量を用いることで，バイアスが減少するが，RMSE が上昇する傾向にあった。更に，ゼロベータリターンの推定量に関する検証を行った。ゼロベータリターンの推定に関しては，バイアス修正推定量を用いることでバイアスと RMSE の両方が改善される傾向にあった。

現実の市場でもファクターモデルが正しいのであれば，本稿のシミュレーションと同様の傾向が予測において観測されるはずである。実証研究では，インサンプルにおける評価とアウトオブサンプルにおける評価が考えられる。収益率のプロセスに構造変化がなく，真の共分散構造の下で投資家が行動していると仮定するのであれば，インサンプルによるアプローチが妥当である。真の共分散構造は事後的に判明するものであるが，何らかの方法によって投資家が事前にそれを知っていると仮定するのである。投資家がデータ以外の情報を利用し

ており，市場が効率的だと考えるのであれば妥当な仮定である。一方で，プロセスに構造変化の恐れがある場合や，投資家の予測を推定値で代用する場合には，それらを組み込んだ方法が必要になる。リスクプレミアムの推定ではローリング推定を用いたアウトオブサンプルの検証方法が広く用いられている。代表的な方法は Fama and MacBeth（1973）によるものである。ローリング推定自体は統計分析における標準的な方法であるが，リスクプレミアムの推定ではベータの推定値を説明変数に用いるため２段階推定が必要となる。２段階推定を応用したローリング推定の手順が Fama and MacBeth（1973）によって導入された。ローリング推定では，ある時点において，それまでに利用できるデータを基に得られた推定値を用いて予測値を構築する。これを各時点において行えば，時点ごとの予測値を得ることができ，その評価ができる。投資家も同様のモデルと推定によって予測を行っていると想定するのである。この方法であれば，実際に観測できる情報を利用してポートフォリオを組んだ場合のパフォーマンスの検証も可能である。この予測において，本稿で用いたような複数の方法を比較することで同様の傾向が確認されるはずである。しかしながら，当然モデルに構造変化が無い場合には，サンプル全体を使った場合よりも推定効率が悪化することになる。予測の評価に関する評価関数と統計的性質に関しても多くの研究が行われている。例えば Inoue et al.（2017）では，回帰モデルを用いた予測におけるローリングウィンドウの決定に関する方法が提案されている。しかし，Fama and MacBeth（1973）のローリング推定におけるウィンドウ選択等に関する統計的性質については，明らかはでない部分が多い。現実の市場への応用を想定した場合に，リスクと対応するリスクプレミアムのモデル化とその統計的推測には広く研究の余地が残されている。

附記　本稿は東京経済大学 2020 年度共同研究助成費（受給番号：D19-06 及び JSPS 科研費 19K13672）の助成を受けたものである。

参考文献

Ang, Andrew, Jun Liu, and Krista Schwarz (2020) "Using Stocks or Portfolios in Tests of Factor Models," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 55, No. 3, p. 709？750.

Bai, Jushan and Guofu Zhou (2015) "Fama-MacBeth two-pass regressions: Improving risk premia estimates," *Finance Research Letters*, Vol. 15, pp. 31–40.

Fama, Eugene F. and Kenneth R. French (1993) "Common risk factors in the returns on stocks and bonds," *Journal of Financial Economics*, Vol. 33, No. 1, pp. 3–56.

Fama, Eugene F. and James D. MacBeth (1973) "Risk, Return, and Equilibrium: Empirical Tests," *Journal of Political Economy*, Vol. 81, No. 3, pp. 607--636.

Frazzini, Andrea and Lasse Heje Pedersen (2014) "Betting against beta," *Journal of Financial Economics*, Vol. 111, No. 1, pp. 1–25.

Inoue, Atsushi, Lu Jin, and Barbara Rossi (2017) "Rolling window selection for out-of-sample forecasting with time-varying parameters," *Journal of Econometrics*, Vol. 196, No. 1, pp. 55–67.

Jensen, Michael C, Fischer Black, and Myron S Scholes (1972) "The capital asset pricing model: Some empirical tests."

Litzenberger, Robert H. and Krishna Ramaswamy (1979) "The effect of personal taxes and dividends on capital asset prices: Theory and empirical evidence," *Journal of Financial Economics*, Vol. 7, No. 2, pp. 163–195.

Ross, Stephen A. (1976) "The arbitrage theory of capital asset pricing," *Journal of Economic Theory*, Vol. 13, No. 3, pp. 341–360, December.

Shanken, Jay (1992) "On the Estimation of Beta-Pricing Models," *The Review of Financial Studies*, Vol. 5, No. 1, pp. 1–33, 05.