研究ノート

因果性測度と予測の改善に関する数値例

木　下　　　亮

1　はじめに

時系列間の予測可能性と因果性は，しばしば Granger 因果性や因果性測度及びインパルス応答関数を用いて評価される。Granger 因果性は，一方の時系列の予測精度の他方の時系列の情報を追加的に用いることによる改善を測定するものである。予測精度は平均二乗誤差（MSE）で評価され，MSE が改善されるときに Granger 因果性があると定義される。その改善の程度は，一方の時系列だけを用いた場合と両方の時系列のを用いた場合の予測誤差の分散比で定義される。これを Granger 因果性測度と呼ぶ。インパルス応答関数は他方の時系列からの時間を通じた影響力を測定するものであり，VMA 係数をラグ数の関数とみなしたものである。

因果性の測度を考えるのであれば，インパルス応答関数と予測の改善の両方の観点から整合的である必要があるであろう。Sims（1972）で示されているように，二変数の場合には Granger 因果性が無いこととインパルス応答関数がゼロであることは同値である。しかし，これは因果性が無い状況のみに着目したものであり，インパルス応答関数がゼロではない場合の定量的な関係に関して言及するものではない。Geweke（1982）では Granger 因果性測度を対数変換したものと，インパルス応答の周波数領域への変換である伝達関数の関係が整理されているが，伝達関数と予測の改善が対応しない場合があることが言及されている。つまり Granger 因果性測度では，他方が一方を引き起こすような因果性以外の要因を捉えてしまう場合があるのである。

Geweke（1982）や Hosoya（1991）では一期先予測誤差の分散を周波数分解することで周波数領域での因果性が定義されている。両者の周波数領域での測度の定義は同一であるが，その積分値に関して異なる展開が行われている。Geweke（1982）では二変数時系列の反転可能な VMA 表現に関して，その要素も根を単位円外に持つ場合に，周波数領域での測度の積分値が Granger 因果性測度の対数値に一致することが示されている。問題は VMA 表現において単位円内に根を持つ要素が含まれる場合である。このような場合にはインパルス応答関数が十分に小さい場合にも Granger 因果性が小さくならない場合があるのである。つまり，Sims（1972）の通り，因果性の有無とインパルス応答の有無は整合的であるが，

VMA 表現において単位円内に根を持つ要素が含む場合には必ずしも整合的ではないのである。これは Granger 因果性が，他方が一方を引き起こすような因果性だけでなく，他方の情報を利用することによる予測の改善を捉えていることを示している。予測の対象が他方へ影響を与え，そのフィードバックから予測が改善されるのである。Hosoya（1991）では Granger 因果性測度を修正し，因果性のみを捉えるような一方向測度が定義されている。

厳密な分析には，インパルス応答関数がゼロとなるような帰無仮説の近傍での因果性測度の漸近的な性質を数学的に調査する必要があるが，本稿ではその前段階として数値例を示す。予測の改善に着目した Granger 測度と因果性に着目した一方向測度の性質について，いくつかの数値例から確認する。

2 因果性測度

二変数時系列が

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{11}(L) & \phi_{12}(L) \\ \phi_{21}(L) & \phi_{22}(L) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1(t) \\ \varepsilon_2(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \varepsilon_1(t) \\ \varepsilon_2(t) \end{pmatrix} \sim N\left(0, \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}\right) \tag{2.1}$$

で生成されるとする。ただし，$\phi_{ij}(L)$ はラグ多項式であり，$\phi_{11}(1)=\phi_{22}(1)=1, \phi_{12}(1)=\phi_{21}(L)=0$ とする。また，MA 係数行列の行列式 $\phi_{11}(L)\phi_{22}(L)-\phi_{12}(L)\phi_{21}(L)$ の根は全て単位円外にあるとする。すなわち，反転させて VAR 表現が可能な VMA 表現であり，一期先予測誤差の分散はそれぞれ σ_1^2, σ_2^2 となる。Granger 因果性は，$x(t)$ と $y(t)$ の両方の過去の情報を用いた $x(t)$ の予測と，$x(t)$ の情報のみを用いた予測を基に定義される。両方の情報を用いるとき，$x(t)$ の予測誤差の分散は上記の通り σ_1^2 であり，$x(t)$ の情報だけを用いるときには，

$$x(t) = \phi_{11}(L)\varepsilon_1(t) + \phi_{12}(L)\varepsilon_2(t) \tag{2.2}$$

という二つのイノベーションから生成される時系列に関する予測を考えることになる。予測には，一つのイノベーションでの反転可能な MA 表現 $x(t)=\theta(L)\eta(t), \eta(t) \sim N(0, \sigma_1^{2*})$ が必要となるが，

$$\theta(z) = \sqrt{2\pi} \cdot \exp\left[\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\exp(-i\lambda)+z}{\exp(-i\lambda)-z} \log f_x(\lambda)d\lambda\right], |z|<1 \tag{2.3}$$

であることを利用して，例えば Hosoya and Takimoto（2010）のアルゴリズムで $\theta(L)$ の多項式表現を得ることができる。ただし，$f_x(\lambda)$ は $x(t)$ のスペクトル密度関数である。また，一期先予測誤差の分散は Kolmogorov の公式により，

$$\sigma_1^{2*} = \frac{1}{2\pi} \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log f_x(\lambda)d\lambda\right) \tag{2.4}$$

である。分散比の関数$1-\sigma_1^2/\sigma_1^{2*}$がGranger（1963）でのGranger因果性測度である。分散比が1である場合には，$y(t)$の利用によって予測が改善されず，Granger因果性がないということになる。Geweke（1982）では，Granger因果性測度を変換して$F=\log(\sigma_1^{2*}/\sigma_1^2)$として因果性測度が定義されている。また，$\sigma_1^{2*}$と$\sigma_1^2$の両方にKolmogorovの公式を適用することで，周波数分解された測度

$$F(\lambda)=\log\left(\frac{f_x(\lambda)}{|\phi_{11}(e^{-i\lambda})|^2\sigma_1^2}\right)=\log\left(\frac{|\phi_{11}(e^{-i\lambda})|^2\sigma_1^2+|\phi_{12}(e^{-i\lambda})|^2\sigma_2^2}{|\phi_{11}(e^{-i\lambda})|^2\sigma_1^2}\right),\pi\leq\lambda<\pi \quad (2.5)$$

が定義されている。$F(\lambda)$は，インパルス応答のフーリエ変換である伝達関数の寄与度で構成されている。これはHosoya（1991）の周波数領域での測度と数値上同一である。しかし，Geweke（1982）とHosoya（1991）の測度はその積分値の定義に違いがある。

Geweke（1982）とHosoya（1991）の測度の違いをもたらす要因は，$\phi_{11}(L)$の根が全て単位円外にあるかどうかである。式（2.1）のVMA係数行列は，行列としては反転可能である（行列式の根の全てが単位円外にある）が，それぞれの要素であるラグ多項式$\phi_{ij}(L)$の根が単位円外にあることは保証されていない。$F(\lambda)$の分母である$\log(|\phi_{11}(e^{-i\lambda})|^2\sigma_1^2)$の積分値が$\sigma_1^2$になれば，周波数領域での測度の積分値（全測度）

$$M=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(\lambda)d\lambda \quad (2.6)$$

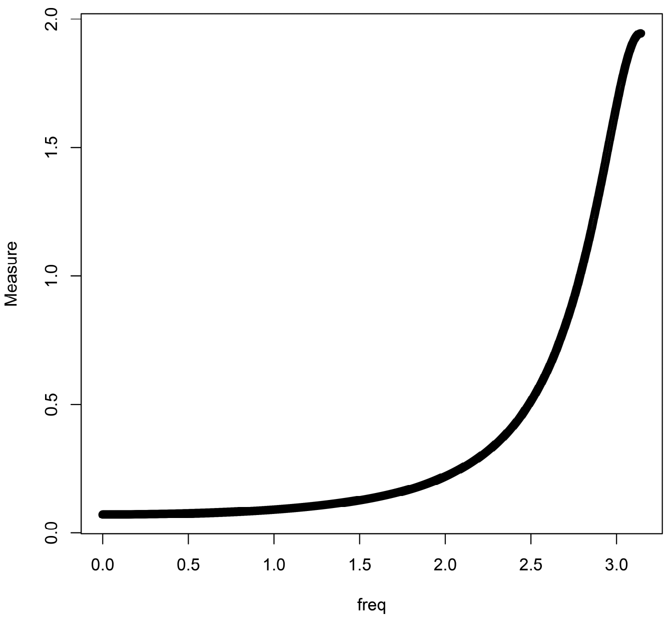
が予測誤差の分散比の対数値に一致することになるが，$\phi_{11}(L)$の根が単位円内にある場合には，これが保証されない。したがって，全測度がGranger因果性測度と対応しない場合があるのである。$y(t)$から$x(t)$へのインパルス応答関数である$\phi_{12}(L)$が極めて小さくても，予測の改善が起こり得るのである。Geweke（1982）では，予測誤差の分散比の対数値Fとして全測度が定義され，式（2.6）がFに一致しない場合があることが言及されていた。Hosoya（1991）では，$(x(t),y(t))$ではなく$(x(t),\varepsilon_2(t))$における$x(t)$の予測誤差の分散比の対数として全測度を定義し，それが式（2.6）に一致することが示されている。つまり，Hosoya（1991）は$(x(t),\varepsilon_2(t))$に関するGranger因果性を考えることでフィードバックを除去し，かつ周波数分解と整合的なものとして一方向測度を定義したのである。

以下では，数値例を用いて予測の改善と因果性の違いをFとMの観点から確認する。はじめに，$\phi_{11}(L)$の根が単位円外にあるようなVMA（1）

$$\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\varepsilon_1(t)\\\varepsilon_2(t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0.8&0.4\\0.5&-0.2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varepsilon_1(t-1)\\\varepsilon_2(t-1)\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\varepsilon_1(t)\\\varepsilon_2(t)\end{pmatrix}\sim N\left(0,\begin{bmatrix}2&0\\0&3\end{bmatrix}\right) \quad (2.7)$$

を考える。この場合のVMA係数の行列式は$(1+0.8L)(1-0.2L)-0.4\cdot0.5L^2$であり，その根は$L=-1.90,-13.1$であり全て単位円外にある。したがってモデルはVAR表現が可能である。また，$\phi_{11}(L)=1+0.8L=0$の根は$L=-1.25$であり単位円外にある。したがって$x(t)$の情報だけを用いる場合の最適予測は$x(t)=\theta(L)\eta(t),\theta(L)=1+0.558L$を基に構成

図 1　周波数分解された測度



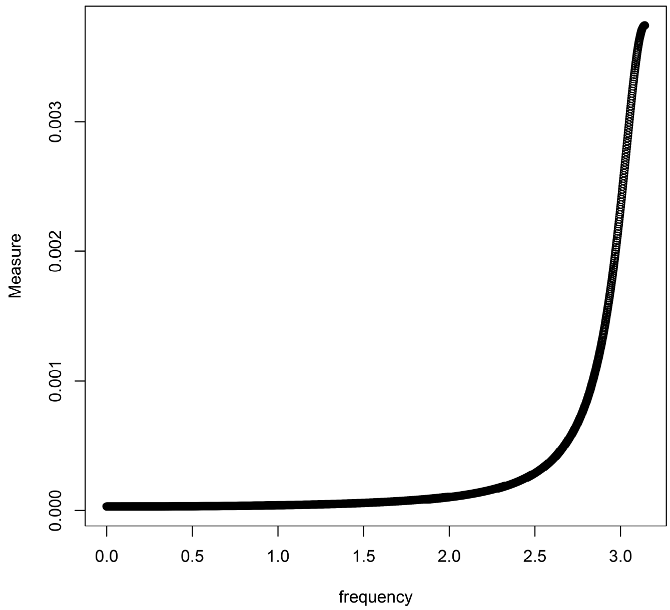
され，予測誤差の分散は 2.868 である。したがって，予測誤差の分散比は $\sigma_1^{2*}/\sigma_1^2=\exp(F)=2.868/2=1.434$ である。周波数分解された測度は，図 1 であり，その積分値は $M=0.360$ である。指数を取ると，予測誤差の分散比と同じく $\exp(M)=1.434$ となり，因果性測度と予測誤差の分散は対応する。すなわち，$\phi_{12}(L)=0.4L$ を通して $y(t)$ から $x(t)$ への因果性が存在し，それを因果性測度と予測の改善の両方で整合的に評価できるのである。

次に，$\phi_{11}(L)$ が単位円内にあるような VMA（1）

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1(t) \\ \varepsilon_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1.2 & 0.01 \\ 40 & -0.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1(t-1) \\ \varepsilon_2(t-1) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \varepsilon_1(t) \\ \varepsilon_2(t) \end{pmatrix} \sim N\left(0, \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\right) \tag{2.8}$$

を考える。この場合には $F \neq M$ となり，インパルス応答関数を通した因果性が極めて小さい場合でも予測が改善される場合がある。この設定において，VMA 係数の行列式の根は $L=-1.25, 5$ で全て単位円外にあり，VAR 表現可能である。VMA 係数の根は全て単位円外にあるが，その要素である $\phi_{11}(L)=1+1.2L=0$ の根は単位円にある。また，$\phi_{12}(L)=0.01L$ であり，$\varepsilon_2(t-1)$ が $x(t)$ に与える影響は小さい。このようなインパルス応答関数の観点から因果性が小さい場合でも予測の改善が生じることを確認する。ここで，VMA 係数の根を単位円外に持ち，かつ $\phi_{11}(L)$ が単位円外に根を持つためには，$\phi_{12}(L)=0$ とはできないことには注意が必要である。数学的な議論では $\phi_{12}(L)$ がゼロに収束するような極限における振る舞いを考えることになるであろう。この例において，$x(t)$ の情報だけを用いる場合の最適予測は$x(t)=\theta(L)+\eta(t), \theta(L)=1+0.833L$ を基に構成され，予測誤差の分散は 2.882

図２　周波数分解された測度



である。したがって，予測誤差の分散比は $\sigma_1^{2*}/\sigma_1^2=\exp(F)=2.882/2=1.441$ である。周波数分解された測度は，図 2 であり，その積分値は $M=0.0003$ である。指数を取ると，$\exp(M)=1.0003$ となり，因果性測度と予測誤差の分散は対応しない。インパルス応答関数 $\psi_{12}(L)=0.01L$ を通した $y(t)$ から $x(t)$ への因果性は極めて小さいものであるが，予測の改善が生じているのである。このような場合に純粋な因果性を測定するためには，Granger 因果性測度よりも Hosoya（1991）の一方向測度の方が適切であろう。

3　おわりに

本稿では，因果性測度と予測の改善が対応しない例を示した。因果性測度の理論に関しては Hosoya（1991）にまとめられており，本稿は単なる数値例である。応用研究においては，Granger 因果性測度と Hosoya（1991）の一方向測度を区別せず，周波数領域における因果性測度のみに着目するものが多く，VMA 係数の要素が単位円内に根を持つかどうかが十分に確認されていない可能性がある。そのような場合には，Granger 因果性測度は因果性ではなくフィードバックによる予測の改善を捉えてしまっていることになる。一方向測度を活用することで適切な因果性の測定が可能になるであろう。

実証分析においては，三変数以上の時系列が対象になる場合がほとんどである。三変数の時系列モデルにおける因果性に関しては Granger（1969）をはじめとして広く議論されてい

る。Granger（1980）や Hosoya（2001）では三変数の時系列モデルにおける一つの変数の影響を除去した上での偏因果性に関する測度が提案されている。Dufour and Tessier（1993）で議論されているように，三変数の時系列では他方の時系列からのインパルス応答関数がゼロであったとしても，第三の変数からのフィードバックを通して 2 期先以上の予測に改善が生じる場合がある。Hosoya（2001）では，三変数の VMA 係数が単位円内に根を持つような部分行列を含む場合の偏因果性測度が提案されている。これは本研究で議論したような二変数時系列において，VMA 係数の（1, 1）要素が根を単位円内に持つ場合の延長線上にある議論である。Hosoya（2001）の偏因果性測度は，Dufour and Tessier（1993）の指摘のようなフィードバックによる問題が生じない測度となっている。理論的には整理されているが，直観的な理解を促すようなシミュレーションや実証研究への適切な応用は少なく，今後の応用研究が期待される。

参 考 文 献

Dufour, Jean-Marie and David Tessier（1993）"On the relationship between impulse response analysis, innovation accounting and Granger causality," *Economics Letters*, Vol. 42, No. 4, pp. 327-333.

Geweke, John（1982）"Measurement of linear dependence and feedback between multiple time series," *Journal of the American statistical association*, Vol. 77, No. 378, pp. 304-313.

Granger, C. W. J.（1963）"Economic processes involving feedback," *Information and control*, Vol. 6, No. 1, pp. 28-48.

——（1969）"Investigating causal relations by econometric models and cross-spectral methods," *Econometrica: journal of the Econometric Society*, pp. 424-438.

——（1980）"Testing for causality: A personal viewpoint," *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol. 2, pp. 329-352.

Hosoya, Yuzo（1991）"The decomposition and measurement of the interdependency between second-order stationary processes," *Probability theory and related fields*, Vol. 88, No. 4, pp. 429-444.

——（2001）"Elimination of Third-series Effect and Defining Partial Measures of Causality," *Journal of Time Series Analysis*, Vol. 22, No. 5, pp. 537-554.

Hosoya, Yuzo and Taro Takimoto（2010）"A numerical method for factorizing the rational spectral density matrix," *Journal of Time Series Analysis*, Vol. 31, No. 4, pp. 229-240.

Sims, Christopher A（1972）"Money, income, and causality," *The American economic review*, Vol. 62, No. 4, pp. 540-552.