欠落ファクターが存在する場合のクロスセクション回帰を用いたリスクプレミアムの推定に関して

木　下　　　亮

1　はじめに

個別資産の収益率は共通変動であるファクターに受けており，市場リターン，マクロ経済指標，タームスプレッド，ボラティリティインデックス等はその代理変数の候補となる。リスクプレミアムとは，リスク資産を保有することによる安全資産利子率を超過する期待収益率のことであり，ファクターが市場リターン等の資産収益率である場合には，その期待超過収益率がリスクプレミアムである。一方で，ファクターが上述のような指標の場合には，指標の変動を資産収益率に射影することによって，それと連動するようなポートフォリオを作成し，その期待収益率としてリスクプレミアムは定義される。本研究の関心は，後者のような非取引ファクターに関するリスクプレミアムの推定にある。

非取引ファクターと連動するようなポートフォリオは，個別資産の収益率をファクターに対する感応度であるベータにクロスセクション回帰することで作成することができる。これは，Black et al.（1972），Fama and MacBeth（1973），Chen et al.（1986）等で用いられている実証ファイナンスでは伝統的な方法である。この方法を用いることで，対象に対してUnit-beta となるようなファクターを抽出することができる。このような Unit-beta ポートフォリオの期待超過収益率が非取引ファクターのリスクプレミアムである。期待収益率の推定にあたって，収益率の時間平均を用いるのが自然な方法である。

真のベータが既知である場合には，上記のクロスセクション回帰は通常の回帰分析であり，一定の仮定の下で推定量は望ましい性質を満たす。しかし，実証分析では真のベータの代わりに推定値を用いることになる。クロスセクション回帰において説明変数に誤差を含むことになるため，係数推定量にバイアスが生じるのである。時系列回帰によるベータの推定量は一致推定量であるから，時系列方向にサンプルサイズを増やすことで誤差は小さくなり，解消されるバイアスであるが，Black et al.（1972）で強調されているように有限標本において無視できる大きさではない。Black et al.（1972）では，個別資産をベータの代理変数によって 10 個のグループに分けてポートフォリオを作成し，そのポートフォリオを分析対象とすることによってバイアスの除去が行われている。ベータに応じてグループ分けすることでポートフォリオ間でのベータの散らばりを確保し，その上でポートフォリオごとの誤差項の分

散を小さくすることでバイアスを減少させるのである。この際に，推定量の分散は，グループの数に反比例することになる。Ang et al. (2020) ではリスクプレミアムの推定におけるバイアスの減少よりも分散の増加の影響が大きいことから，グループ分けされたポートフォリオよりも個別株式を用いることが推奨されている。本稿では Unit-beta の再現性という観点から，ポートフォリオを用いた分析の方が望ましいことを確認する。

本研究では，上記のバイアスと合わせて欠落ファクターの影響を考慮する。欠落ファクターは誤差項の一部であるから，関心のあるファクターと直交しており，かつベータがクロスセクションで直交している場合のみを対象とする。この場合に，バイアスは欠落ファクターのベータの分散によって決定される。グループ分けによってグループ間でのベータが均質化されるため，欠落ファクターは全体に一様に影響を与えるファクターに変換されることになる。したがって，定数項をクロスセクション回帰に含める場合に，グループ分けによってバイアスは減少することになる。また，推定量の分散は欠落ファクターのベータの関心のあるファクターのベータへの回帰係数で決定されることになる。この際に，分散はグループの数に対して反比例することはなく，ベータによるグループ分けによって減少する。つまり，欠落ファクターが存在する場合には，グループ分けによってバイアスと分散の両方を減少させることができるのである。これらの性質をシミュレーションによって確認する。

また，日本の株式市場においてマクロ経済指標をファクターとみなし，そのリスクプレミアムを推定する実証研究には Hamao (1988) があるが，後続する研究は極めて少ない。米国における実証分析には Chen et al. (1986)，Balduzzi and Robotti (2008)，Kleibergen and Zhan (2015) 等があるが，マクロ経済指標が株式収益率に対してファクターとして機能しているかどうか，リスクプレミアムが生じているかどうか，に関してコンセンサスは得られていない。国内株式市場ににおける実証例を例示し，マクロ経済指標にリスクプレミアムが生じていることを確認する。

2　モデル

個別資産 $i, i=1, \cdots, N$ の安全資産利子率に対する超過収益率は

$$R_{i,t} = \alpha_i + \beta_i \lambda_1 + f_t^0 + \beta_i' (\tilde{f}_t - E[\tilde{f}_t]) + \beta_i'^{+} (\tilde{f}_t^{+} - E[\tilde{f}_t^{+}]) + \varepsilon_{i,t}$$

から生成されると仮定する。ただし，$f_t^0, \tilde{f}_t, \tilde{f}_t^{+}$ は個別資産に対して共通変動をもたらすファクターであり，$f_t = \tilde{f}_t - E[\tilde{f}_t]$ と表記する。また，$\tilde{f}_t^{+}$ に関しても同様に表記する。簡単化のために，f_t を $k \times 1$ のベクトルとし，f_t^{+} をスカラーとする。前者を関心のあるファクターとし，後者を欠落ファクターとする。更に，f_t^0 は全ての資産に一様に影響を与えるファクターとする。すなわち，全ての資産の間でベータが共通して 1 であるようなファクターで

ある。このように，ファクターは全体に一様に影響を与えるものと，影響の与え方に資産間で違いがあるものに分けることができる。本研究は，収益率のクロスセクションでの違いを利用して，後者 f_t に対する Unit-beta ポートフォリオを抽出するものである。また，α_i はミスプライシングによる期待超過収益率，$\varepsilon_{i,t}$ は個別資産特有の変動である。Sharpe（1964）の CAPM や Ross（1976）による APT は，金融資産市場における均衡を記述したモデルであるが，これらの帰結が正しい場合には α_i はゼロとなる。すなわち，$\alpha_i \neq 0$ である場合には代表的個人の効用改善や裁定取引の機会が存在することになる。多資産の収益率をベクトルを用いて表現すると，

$$R_t = \alpha + \beta\lambda_1 + f_t^0 1_N + \beta f_t + \beta^+ f_t^+ + \varepsilon_t \tag{2.1}$$

となる。ただし，$R_t = (R_{1,t}, R_{2,t}, \cdots, R_{N,t})'$，$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_N)'$，$\beta = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_N)'$，$\beta^+ = (\beta_1^+, \beta_2^+, \cdots, \beta_N^+)'$，$\varepsilon_t = (\varepsilon_{1,t}, \varepsilon_{2,t}, \cdots, \varepsilon_{N,t})'$ である。ファクター f_t，欠落ファクター f_t^+，誤差項 ε_t の分散共分散行列をそれぞれ $\sum_f, \sigma_f^{+2}, \sum$ とする。欠落ファクター f_t^+ は f_t に射影した残差として解釈すればよいから，f_t と直交すると仮定し，$\beta^+ f_t^+ + \varepsilon_t$ をクロスセクションにおける誤差項とみなすことから，β と β^+ は直交する，つまり $\lim_{N\to\infty} 1/N(\beta' M_N \beta^+) = 0$ とする。このとき，β が既知であれば R_t を β と定数項に回帰することによって回帰係数は，

$$\lambda_{1,t} = (\beta' M_N \beta)^{-1} \beta' M_N R_t = \lambda_1 + f_t + (\beta' M_N \beta)^{-1} \beta' M_N \beta_i^+ f_t^+ + (\beta' M_N \beta)^{-1} \beta' M_N \varepsilon_t$$

となり，$\lambda_{1,t}$ は f_t に対して Unit-beta であり，その期待値として λ_1 を抽出することができる。すなわち，f_t を R_t に射影することで非取引ファクターと連動するポートフォリオを作成し，その期待値としてリスクプレミアムを定義するのである。左辺の R_t の係数である $(\beta' M_N \beta)^{-1} \beta' M_N$ の各行がポートフォリオウェイトに対応する。このポートフォリオは β_i が高いものを購入して，低いものを空売りするポートフォリオになっており，その合計はゼロである。ポートフォリオウェイトの合計がゼロであることから，f_t^0 は相殺される。このようなクロスセクション回帰によるリスクプレミアムの推定において，N が大きくなるか，ε_t の分散が小さくなるにつれて，$(\beta' M_N \beta)^{-1} \beta' M_N \varepsilon_t$ がゼロに収束して f_t と完全に連動するポートフォリオを抽出することができる。個別資産を用いた分析の場合には N が大きく，グループ分けによって作成されたポートフォリオを用いる場合には ε_t の分散が小さくなるため，どちらの方法でも f_t を高い精度で抽出できることになる。

一方で，β が未知であり，推定量である $\hat{\beta}$ で代用する場合にはポートフォリオを用いることによる利点がある。本研究では Black et al.（1972）や Fama and MacBeth（1973）で行われている通り，R_{t+1} を $t-T^*$ から t までのデータから推定された $\hat{\beta}$ に推定する方法を考える。この方法では look-ahead バイアスを避けることができ，$\hat{\beta}$ と ε_{t+1} が相関を持たない。収益率 R_{t+1} を $\hat{\beta}$ と定数項にクロスセクション回帰した場合の係数推定量は

欠落ファクターが存在する場合のクロスセクション回帰を用いたリスクプレミアムの推定に関して

$$\begin{aligned}\hat{\lambda}_{1,t+1} &= (\hat{\beta}'M_N\hat{\beta})^{-1}\hat{\beta}'M_N R_{t+1} = (I_N+(\hat{\beta}'M_N\hat{\beta})^{-1}\hat{\beta}'M_N(\beta-\hat{\beta})(\lambda_1+f_{t+1}) \\ &\quad +(\hat{\beta}'M_N\hat{\beta})^{-1}\hat{\beta}'M_N\beta^+ f^+_{t+1}+(\hat{\beta}'M_N\hat{\beta})^{-1}\hat{\beta}'M_N\varepsilon_{t+1} \qquad (2.2)\end{aligned}$$

となる。これは f_{t+1} に対する事前の Unit-beta ポートフォリオの収益率である。すなわち，$\hat{\beta}$ を DGP のパラメータとみなした場合の Unit-beta ポートフォリオである。リスクプレミアムである λ_1 の自然な推定量はローリング推定による Unit-beta ポートフォリオの収益率の時間平均であり，$\hat{\lambda}_1=1/(T-T^*)\sum_{t=T^*+1}^{T}\hat{\lambda}_{1,t}$ である。推定量である $\hat{\beta}$ は真の β に対して誤差を持つ変数であるから，このクロスセクション回帰は EIV バイアスの対象となる。つまり，$E(\hat{\beta}'M_N\hat{\beta})^{-1}\hat{\beta}'M_N(\beta-\hat{\beta})]=0$ とならないことから，$\hat{\lambda}_{1,t+1}$ は真のプロセスに対して Unit-beta とならず，λ_1 の推定にもバイアスをもたらすことになるのである。欠落ファクターが存在しない場合，すなわち $f^+_{t+1}=0, \forall t$ におけるバイアスに関しては，Black et al.（1972）において議論されており，Bai and Zhou（2015）においてマルチファクターかつパネルデータの設定における小標本バイアスが導出されている。バイアスは

$$E[\hat{\lambda}_1]-\lambda_1 = -(\beta'M_N\beta)^{-1}\left(\sum_{i=1}^{N}\sigma_i^2\right)\Sigma_f^{-1}\lambda_1/T^*+o(1/T^*) \qquad (2.3)$$

であるが，これは（2.2）における f_{t+1} に対する係数が Unit-beta とはならず，バイアスを持つことに起因している。この f_{t+1} の係数のバイアスは

$$E[(\hat{\beta}'M_N\hat{\beta})^{-1}\hat{\beta}'M_N\beta-I] = -(\beta'M_N\beta)^{-1}\left(\sum_{i=1}^{N}\sigma_i^2\right)\Sigma_f^{-1}/T^*+o(1/T^*). \qquad (2.4)$$

である。つまり，インサンプルで f_t に対して Unit-beta となるような作られたポートフォリオが，アウトオブサンプルでは f_{t+1} に対して Unit-beta とはならず，そのベータリスクの評価のバイアスがリスクプレミアムの推定にもバイアスをもたらすのである。シングルファクターの場合には，バイアスを $-1/(\sigma_f^2T^*)(\sum_{i=1}^{N}\sigma_i^2)/\sum_{i=1}^{N}(\beta_i-\bar{\beta})^2$ と表現することができる。バイアスを構成するのは β のクロスセクションの分散と誤差項 ε_{t+1} の分散である。前者を低下させずに後者を低下させることができればバイアスを減らすことができる。これがベータによるグループ分けで達成されるのである。したがって，小標本バイアスの観点からは個別資産よりもポートフォリオを用いたクロスセクション回帰の方が望ましい推定量だと考えられる。このバイアスは $O(1/T^*)$ の項による小標本バイアスであり，通常の中心極限定理による漸近分布には現れないものである。それほど T が大きくない場合でも無視されることが多い項ではあるが，第 3 節と第 4 節で示すシミュレーションと実証分析において無視できない大きさとなることを確認する。

欠落ファクターが存在する場合には，$(\hat{\beta}'M_N\hat{\beta})^{-1}\hat{\beta}'M_N\hat{\beta}_i^+f^+_{t+1}$ の影響を考慮しなければならない。本稿では欠落ファクターがもたらすバイアスの数式表現には踏み込まないが，シミュレーションによって検証を行う。グループ分けを行うことによって β^+ がポートフォリオ

間で均質化されるため，ここまでの議論と同様のロジックでバイアスが減少することが予想される。

欠落ファクターが存在する場合の分散の数式表現は，

$$Var[\lambda_{1,t+1}] = \sigma_f^{+2}(\beta' M_N \beta)^{-1}\beta' M_N \beta^{+}\beta'^{+} M_N \beta(\beta' M_N \beta)^{-1} + (\beta' M_N \beta)^{-1}\beta' M_N \Sigma M_N \beta(\beta' M_N \beta)^{-1} + \Sigma_f + o(1/T^*) \tag{2.5}$$

となる。右辺の第 2，3 項は従来のリスクプレミアムの推定における分散を表す項である。この二つの項に関して，Shanken (1992) で提案された漸近分散では，インサンプルでの分析が前提とされており，$\hat{\beta}$ と ε_t の相関を考慮した調整を行って $(\beta' M_N \beta)^{-1}\beta' M_N \Sigma(1+\lambda_1' \Sigma_f^{-1}\lambda_1) M_N \beta(\beta' M_N \beta)^{-1}$ とされる。しかし，本研究では先に述べた通り，Fama-Macbeth 法によって $\hat{\beta}$ の推定に用いる期間と収益率 R_{t+1} を分離する構成にしているため，Shanken (1992) の調整は不要である。第 2，3 項のみに着目した場合には，ポートフォリオの利用によって $(\beta' M_N \beta)^{-1}$ が小さくなるため，分散は大きくなる。ただし，β の散らばりを確保するようにグループ分けを行うことによって $(\beta' M_N \beta)^{-1}$ の低下を和らげることができる。つまり，バイアスと分散にトレードオフがあるが，β と相関の強い代理変数でのグループ分けを行うことで，バイアスは改善され，分散の上昇を和らげることができるのである。β のクロスセクションでの散らばりが無い場合には，$(\beta' M_N \beta)^{-1}$ が退化して，説明変数が変動しない回帰分析となるため，そもそも λ_1 を推定することはできない。説明変数の散らばりが小さい場合には，バイアスと分散が大きくなって推定量の性質は悪化するのである。右辺第 1 項が欠落ファクターの影響を表すものである。これは，β^{+} の β に対する回帰係数で構成されている。すなわち，β のクロスセクションでの分散と，β と β^{+} の共分散で構成されているのである。β と相関を持つ代理変数によってグループ分けを行うことで，$\beta' M_N \beta$ を縮小させずに $\beta' M_N \beta^{+}$ を小さくすることができる。したがって，分散の内で欠落ファクターに起因する部分は，グループ分けによって減少することになる。以下では，シミュレーションと実証分析を行ってその影響を調査する。

3　シミュレーション

本研究では，$t+1$ における収益率 R_{t+1} に関する分析を行うにあたって，Fama-Macbeth 法によってベータの推定には t までのデータを用いることにしている。そのため，本研究の関心は事前の Unit-beta ポートフォリオである $(\hat{\beta}' M_N \hat{\beta})^{-1}\hat{\beta}' M_N$ がアウトオブサンプルにおいても Unit-beta をもたらすかどうかである。

はじめに，欠落ファクターが存在しないモデルを考える。実証分析における現実的な T^* において，EIV バイアスは無視できる大きさではないことを確認する。更に，グループ分

表１　欠落ファクターがない場合の Unit-beta ポートフォリオの $\hat{\theta}$ と標準誤差

N^* \ ρ	0	0.4	0.8	1
10	0.105	0.945	0.966	0.959
	(0.118)	(0.027)	(0.014)	(0.011)
25	0.121	0.873	0.942	0.946
	(0.065)	(0.026)	(0.014)	(0.011)
100	0.174	0.648	0.858	0.882
	(0.031)	(0.021)	(0.013)	(0.01)
500	0.217	0.369	0.574	0.664
	(0.014)	(0.013)	(0.01)	(0.009)
4000	0.212	0.212	0.212	0.212
	(0.005)	(0.005)	(0.005)	(0.005)

表２　欠落ファクターがある場合の Unit-beta ポートフォリオの $\hat{\theta}$ と標準誤差

N^* \ ρ	0	0.4	0.8	1
10	0.295	0.960	0.985	0.986
	(0.289)	(0.031)	(0.014)	(0.011)
25	0.250	0.872	0.954	0.964
	(0.275)	(0.043)	(0.017)	(0.012)
100	0.334	0.653	0.854	0.888
	(0.264)	(0.097)	(0.04)	(0.028)
500	0.329	0.418	0.593	0.660
	(0.26)	(0.187)	(0.113)	(0.089)
4000	0.332	0.332	0.332	0.332
	(0.26)	(0.26)	(0.26)	(0.26)

けを行うことでバイアスを除去できるが，分散が大きくなることを確認する。データを $R_t=\beta f_t+\varepsilon_t$ によって T^*+1 個を生成し，R_{T^*+1} を T^* 期までのデータで推定した $\hat{\beta}$ に回帰する。ただし，β の推定に用いるデータ数を $T^*=120$ とし，銘柄数を $N=4000$，グループの数を $N^*=(10, 25, 100, 500, 4000)$ とする。また，$f_t \sim N(0, 0.05^2)$，$\varepsilon_t \sim N(0, 0.1^2I)$ とする。ベータは $\beta_i \sim N(0, 0.3^2)$ であり，β_i の代理変数は $\rho\beta_i+\sqrt{1-\rho^2}e, e \sim N(0, 0.3^2I)$，$\rho=(0, 0.4, 0.8, 1)$ で生成される。この設定の下で実験を 1000 回行い，j 回目の実験で得られた Unit-beta ポートフォリオの収益率を $\hat{\lambda}^{(j)}_{1,T^*+1}$ とする。これは事前の Unit-beta ポートフォリオであり，アウトオブサンプルで $f^{(j)}_{T^*+1}$ に回帰したときにも Unit-beta になることが望ましい。すなわち，$\hat{\lambda}^{(j)}_{1,T^*+1}=\delta+\theta f^{(j)}_{T^*+1}+error$ として回帰分析を行って，$\hat{\theta}=1$ となるかどうかに関心がある。表１は，ρ と N^* ごとの回帰分析の結果を表したものであり，括弧内の数値

は標準誤差を表す。はじめに $\rho=0$ の場合を確認する。これは β と関係のない代理変数でグループ分けを行う場合であるから，完全に無駄な操作を行っていることになり，バイアスと標準誤差の両方がグループの数が小さくなるにつれて悪化している。一方で，$\rho=1$ の場合には N^* が小さくなるにつれて $\hat{\theta}=1$ に近づいていおり，標準誤差の増加も緩和されている。また，$\rho=0.4, 0.8$ の場合にも同様の傾向を確認できる。これは，β と相関のある代理変数でグループ分けを行うことによって，事前の Unit-beta ポートフォリオがアウトオブサンプルでも Unit-beta ポートフォリオとして機能することを示している。すなわち，個別株を用いた場合の性質には再現性が確認されないが，ポートフォリオを用いる場合には確認されているのである。

次に，欠落ファクターが存在するモデルを考える。データを $R_t=\beta f_t+\beta^+ f_t^+$. によって生成する。欠落変数の影響を抽出するため，誤差項の存在しないモデルとなっている。ただし，上述の通り f_t と f_t^+ は時系列間で直交し，β と β^+ はクロスセクションにおいて直交している。先のシミュレーションと同様に，β の推定に用いるデータ数を $T^*=120$ とし，銘柄数を $N=4000$，グループの数を $N^*=(10, 25, 100, 500, 4000)$ とする。また，$\beta\sim N(0, 0.3^2)$，$\beta^+\sim N(0, 3^2)$，$f_t\sim N(0, 0.05^2)$，$f_t^+\sim N(0, 0.2^2)$ とする。グループ分けに用いる β の代理変数は $\rho\beta+\sqrt{1-\rho^2}e, e\sim N(0, 0.3^2 I)$，$\rho=(0, 0.4, 0.8, 1)$ である。欠落ファクターが存在する場合でも，バイアスはグループ分けによって減少することが確認された。更に，分散の低下も確認されており，欠落ファクターが存在する場合にこそポートフォリオを用いた分析が有用である可能性が示唆された。

4　実証分析

本研究の推定量である $\hat{\lambda}_{1,t+1}=(\hat{\beta}' M_N \hat{\beta})^{-1}\hat{\beta}' M_N R_{t+1}$ はベータの違い，すなわちマクロ経済指標からの影響の受けやすさの違いに着目してファクターを抽出するものである。したがって，実証分析においては資産によって影響の受けやすさが異なるような指標を対象とするべきである。あらゆる資産に対して一様に影響を与えるようなファクターが複数存在したとしても，それが何による影響なのかを識別することはできず，等加重ポートフォリオの収益率として抽出されるのである。本稿では，商業動態統計の合計額の変動率をファクターとみなして，そのリスクプレミアムの推定を行う。一つ目の焦点は，商業動態統計に対するベータに銘柄間で散らばりがあり，Unit-beta ポートフォリオを作成できるかどうかである。真のベータに散らばりが無いのであれば，インサンプルでの当てはめは標本誤差によるものであり，アウトオブサンプルにおいて性質は失われることになる。これを Fama-Macbeth 型のローリング推定によって確認するのである。事前の Unit-beta ポートフォリオがアウトオブサンプルでも Unit-beta になるかどうか，が問題である。その際のグループ分けの影響を

表３　Unit-beta ポートフォリオの商業動態統計の合計額の変動率に対する回帰分析

	Dependent variable: $\hat{\lambda}_{1,t+1}$				
N^*	10	25	100	500	Individual
商業動態統計	1.044***	0.845***	0.500***	0.182***	0.181***
	(0.286)	(0.242)	(0.154)	(0.061)	(0.054)
Constant	2.088	2.043	0.846	0.361	0.551
	(3.191)	(2.693)	(1.715)	(0.685)	(0.601)
Observations	274	274	274	274	274
R^2	0.047	0.043	0.037	0.031	0.040

Note: *p＜0.1; **p＜0.05; ***p＜0.01

吟味する。二つ目の焦点は，Unit-beta ポートフォリオを作成できたとして，その期待超過収益率であるリスクプレミアムが正となるかどうか，である。銘柄間でベータに違いがある場合には，商業動態統計の合計額の変動に影響を受けやすいものには，相対的に高いリスクが生じていることになるから，その分のリスクプレミアムが生じるはずである。上述の通り，Unit-beta ポートフォリオはベータの高い銘柄を購入して，低い銘柄を空売りするものであり，かつ Unit-beta になるように標準化されたものである。したがって，その期待値としてリスクプレミアムが抽出されるのである。商業動態統計の合計額の下落は，株式市場外で投資家の効用を低下させたり，Merton（1973）の意味で，将来の投資機会の悪化をもたらすと考えられる。したがって，投資家は商業動態統計の合計額の変動をヘッジするようにポートフォリオを組むため，均衡において正のリスクプレミアムが生じると考えられる。

データの期間を 2000/1 から 2023/5 とする。商業動態統計は，翌月末に速報が公表されるため，当月末において経済活動は実現しているが未発表である。したがって，当月末から翌月末にかけての株式収益率と先月から当月にかけての商業動態統計の合計額の変動率を用いた分析を行う。金融業を除く全上場銘柄を対象とする。ウィンドウサイズを 120 カ月としたローリング推定によって分析を行う。グループの数は $N^*=(10, 25, 100, 500)$ とし，更に個別株を用いた分析を行う。

表 3 は，ローリング推定によって得られた事前の Unit-beta ポートフォリオ $\hat{\lambda}_{1,t+1}$ を事後的に商業動態統計の合計額の変動率に回帰した結果である。シミュレーションと同様に，ポートフォリオの数を小さくすることで Unit-beta に近づいていることが確認できる。特に，$N^*=500$ や個別株を用いた場合には，事前の Uni-beta ポートフォリオがアウトオブサンプルでは 0.18 程度のベータとなっており，インサンプルの分析に再現性が無い。係数推定値の標準誤差は，ポートフォリオの数が小さくなるにつれて大きくなっており，欠落ファクターよりも誤差項の影響が強いと考えられる。

表 4 は，Unit-beta ポートフォリオの時間平均としてリスクプレミアムを推定した結果で

表 4　Unit-beta ポートフォリオの収益率の記述統計量

N^*	10	25	100	500	Individual
Mean	2.68	2.53	1.13	0.46	0.65
Sd	53.93	45.43	28.84	11.48	10.12
t-stat	0.82	0.92	0.64	0.67	1.07

ある。上述の Unit-beta の再現性という観点から，$N^*=10$ の場合の結果を採択するのが妥当である。商業動態統計の合計額の 1% の変動に耐えることに対して，2.68% のリスクプレミアムが推定された。しかし，この結果は統計的に有意ではないことには注意が必要である。検証方法の発展やデータの蓄積を通じた更なる分析が期待される。

5　おわりに

本稿では，リスクプレミアムの推定に際して Unit-beta の再現性とグループ分けの観点から議論を行い，シミュレーションによって Black et al.（1972）で提案されたようなグループ分けが有用であることを確認した。更に，欠落ファクターが存在する場合に，それがモデルに組み込まれたファクター f_t と直交し，かつそのベータである β^+ が β と直交する場合に，グループ分けによってバイアスと分散の両方が改善されることを確認した。しかし，この直交性の仮定は検討の余地を残している。目的に応じた適切なモデリングや仮定が必要になると考えられる。マクロ経済指標を用いた実証分析では，ローリング推定によって Unit-beta のアウトオブサンプルでの再現性に関して，グループ分けが有用であることを確認した。

リスクプレミアムの推定におけるバイアスの除去に関しては，多くの議論が残されている。本稿ではシングルファクターモデルを対象としたが，ファクターの数が多くになるにつれてグループ分けによる対処は困難になる。また，グループ分けを行うことによって分析対象となったファクター以外の変動はグループ間で均質化されて等加重ポートフォリオの収益率に変換されてしまう。したがって，この方法では個別資産の収益率を説明する統一的なモデルには到達することができない。一方で，個別株を用いる場合には EIV バイアスの影響が致命的であることは，これまでの議論の通りである。モデリングの工夫として，Fama and French（1997），Fama and French（2019），Kelly et al.（2019）では，ベータの代理変数として企業特性を用いるものが提案されているが，これらはマクロ経済指標と直接的に関連させられるものではない。また，それらの方法とグループ分けの関係性は明確ではない。グループ分けだけでなく，統計学におけるモーメント調整を基にした標準的なバイアス修正推定量も一つの方法である。このような方法は Litzenberger and Ramaswamy（1979）と Bai and Zhou（2015）で提案されているが，グループ分けよりも効果的なバイアスの除去を行え

る場合は少ない。木下（2022）では，このバイアス修正推定量及びグループ分けに関するシミュレーションが行われている。このように，リスクプレミアムの推定方法は統計分析の理論の発展及び詳細なシミュレーションによる改善の余地が残された分野である。その改善によって金融市場における意思決定やそれを通じた社会厚生の改善が期待される。

謝辞

本稿は東京経済大学 2022 年度共同研究助成費（研究番号：D22-03）による研究成果の一部である。また，本研究は JSPS 科研費 JP19K13672 の助成を受けたものである。

参 考 文 献

Ang, Andrew, Jun Liu, and Krista Schwarz (2020) "Using Stocks or Portfolios in Tests of Factor Models," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 55, No. 3, pp. 709–750, DOI: http://dx.doi.org/10.1017/S0022109019000255.

Bai, Jushan and Guofu Zhou (2015) "Fama-MacBeth two-pass regressions: Improving risk premia estimates," *Finance Research Letters*, Vol. 15, pp. 31–40, DOI: http://dx.doi.org/10.1016/j.frl.2015.08.001, ID: 273054.

Balduzzi, Pierluigi and Cesare Robotti (2008) "Mimicking Portfolios, Economic Risk Premia, and Tests of Multi-Beta Models," *Journal of Business & Economic Statistics*, Vol. 26, No. 3, pp. 354–368, DOI: http://dx.doi.org/10.1198/073500108000000042, doi: 10.1198/073500108000000042.

Black, Fischer, Michael C. Jensen, and Myron Scholes (1972) "The capital asset pricing model: Some empirical tests."

Chen, Nai-Fu, Richard Roll, and Stephen A. Ross (1986) "Economic Forces and the Stock Market," *The Journal of Business*, Vol. 59, No. 3, pp. 383–403, 08.

Fama, Eugene F. and Kenneth R. French (1997) "Industry costs of equity," *Journal of Financial Economics*, Vol. 43, No. 2, pp. 153–193, DOI: http://dx.doi.org/10.1016/S0304-405X(96)00896-3, ID: 271671.

Fama, Eugene F and Kenneth R French (2019) "Comparing Cross-Section and Time-Series Factor Models," *The Review of Financial Studies*, Vol. 33, No. 5, pp. 1891–1926, 08, DOI: http://dx.doi.org/10.1093/rfs/hhz089.

Fama, Eugene F. and James D. MacBeth (1973) "Risk, Return, and Equilibrium: Empirical Tests," *Journal of Political Economy*, Vol. 81, No. 3, pp. 607–636, DOI: http://dx.doi.org/10.1086/260061, doi: 10.1086/260061; 07.

Hamao, Yasushi (1988) "An empirical examination of the Arbitrage Pricing Theory: Using Japanese data," *Japan and the World Economy*, Vol. 1, No. 1, pp. 45–61, DOI: http://dx.doi.org/10.1016/0922-1425(88)90005-9, ID: 271660.

Kelly, Bryan T., Seth Pruitt, and Yinan Su (2019) "Characteristics are covariances: A unified model of risk and return," *Journal of Financial Economics*, Vol. 134, No. 3, pp. 501–524, DOI: http://dx.doi.org/10.1016/j.jfineco.2019.05.001, ID: 271671.

Kleibergen, Frank and Zhaoguo Zhan (2015) “Unexplained factors and their effects on second pass R-squared’s,” *Journal of Econometrics*, Vol. 189, No. 1, pp. 101–116, DOI: http://dx.doi.org/10.1016/j.jeconom.2014.11.006, ID: 271689.

Litzenberger, Robert H. and Krishna Ramaswamy (1979) “The effect of personal taxes and dividends on capital asset prices: Theory and empirical evidence,” *Journal of Financial Economics*, Vol. 7, No. 2, pp. 163–195, DOI: http://dx.doi.org/10.1016/0304-405X(79)90012-6, ID: 271671.

Merton, Robert C. (1973) “An Intertemporal Capital Asset Pricing Model,” *Econometrica*, Vol. 41, No. 5, pp. 867–887, DOI: http://dx.doi.org/10.2307/1913811, 08.

Ross, Stephen A. (1976) “The arbitrage theory of capital asset pricing,” *Journal of Economic Theory*, Vol. 13, No. 3, pp. 341–360.

Shanken, Jay (1992) “On the Estimation of Beta-Pricing Models,” *The Review of Financial Studies*, Vol. 5, No. 1, pp. 1–33, DOI: http://dx.doi.org/10.1093/rfs/5.1.1, 2023.

Sharpe, William F. (1964) “Capital Asset Prices: a Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk*,” *The Journal of Finance*, Vol. 19, No. 3, pp. 425–442, DOI: http://dx.doi.org/10.1111/j.1540-6261.1964.tb02865.x, https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1964.tb02865.x; 01.

木下亮（2022）「ソートポートフォリオを用いる場合のリスクプレミアムの 2 段階推定に関するシミュレーション」,『東京経大学会誌（経営学）』, 第 314 巻, 21–31 頁。