

# 尤度距離におけるリッジパラメータに関する影響力

竹内 秀一

Influence based on the Ridge Parameter in Likelihood Distance

Hidekazu TAKEUCHI

Some influence measures based on the case deletion procedure are proposed both in linear regression and in ridge regression. Likelihood distance as an influence measure based on the log-likelihood in ridge regression is taken up in this paper. Differentiating the influence measure with respect to the ridge parameter yields the derivative with Cook's distance in ridge regression. Then the derivative on the ridge parameter enables us to assess the influence of the deleted observation. A new expression of the derivative of the influence measure in ridge regression is also proposed by using basic elements in sensitivity analysis. Furthermore a numerical example for a real data set shows that the derivative on the ridge parameter of the likelihood distance in ridge regression plays an important role in the assessment of the influence of the observation.

## 1 はじめに

線形回帰分析における観測値の影響力評価を、Hoerl and Kennard[3]によって提案されたリッジ回帰 (ridge regression) へ応用した場合について考える。これまでに、リッジ回帰における影響力評価のための診断統計量 (influence measure) として、ノルム化診断統計量である Cook の距離 (Cook's distance) や行列式型診断統計量である一般化分散比 (covariance ratio) などに加えて、回帰係数の対数尤度規準に基づく診断統計量である尤度距離 (likelihood distance) を取り上げてきた (竹内 [7][9][10] を参照)。これらの診断統計量においては、観測値の影響力評価をするために、個々の観測値を除去する方法 (以下、観測値除去法) に基づく場合、つまり single-case を中心に取り上げている。この理由は、通常の線形回帰の場合と同様に、リッジ回帰においても観測値除去法に基づいて観測値の影響力を評価することが最も重要だからである。しかしながら、リッジ回帰における診断統計量においては、観測値の影響力評価をするためにもう一つ別の視点がある。それは、リッジ回帰に特有なリッジパラメータに関して、観測値の影響力評価を検討することである。換言すれば、リッジ回帰における観測値除去法に基づく診断統計量に対して、リッジパラメータの変化に関する挙動を調べるのである。この挙動を調べるための一つの方法として、リッジ回帰における診断統計量をリッジパラメータに関して偏微分をすることによりその導関数を求め、その変化の特性から観測値の影響力を評価するのである。

## 尤度距離におけるリッジパラメータに関する影響力

すでに、リッジ回帰における Cook の距離については、Takeuchi[8]がリッジパラメータに関して偏微分することによりその導関数を示し、補助的な診断統計量と位置付けて観測値の影響力評価に利用している。ところが、その他のリッジ回帰における診断統計量についてはこのような導関数が導出されていないために、リッジパラメータに関する影響力評価も行われていない。そこで、本研究では、竹内 [10] において示されたリッジ回帰における尤度距離の新表現に対して、リッジパラメータに関する偏微分をし、その導関数を最初に求める。竹内 [10] においては、リッジ回帰における尤度距離の定義を与えて、観測値の影響力評価における基本的な統計量による新たな計算式を導出している。その新たな計算式は、リッジ回帰における Cook の距離との関連性 (関数関係) に基づく新表現として得られているので、リッジ回帰における尤度距離の導関数を比較的容易に算出できるのである。なお、今後の議論においては、リッジパラメータに関する偏微分を、単に微分と表記する。これは、観測値除去法においては観測値が主たる変数であるが、リッジパラメータと観測値は独立に扱うことができるので、観測値は見かけ上定数として固定的に扱い、リッジパラメータに関する変化 (挙動) のみに着目するからである。

つぎに、竹内 [10] で取り上げられている同じ数値例に対して、リッジパラメータに関する微分により得られる尤度距離の導関数についての挙動を調べることにより、改めて尤度距離の性質を検討する。その数値例により検証されていることは、リッジ回帰の特性であるリッジパラメータの変化 (増加させること) に対して、観測値により尤度距離が減少してから増加する場合と、増加のみを続ける場合があることの 2 点である。前者の場合は、リッジ回帰を適用することにより観測値の影響力を小さくする (縮小する) ことが可能であるが、後者の場合は、観測値の影響力がより大きくなるのでリッジ回帰の適用に注意を要することが特徴として挙げられている。これらのことがリッジ回帰における尤度距離の導関数からも同様の傾向を裏付けられることを再確認する。

本論文の構成は以下のとおりである。第 2 節では基本的な各種の統計量およびリッジ回帰における尤度距離などを定義する。第 3 節において、リッジ回帰における尤度距離に対してリッジパラメータに基づく観測値の影響力を評価するために、それをリッジパラメータに関して (偏) 微分し、その導関数を求める。第 4 節では、この導関数の挙動を実際のデータに基づく数値例に対して示す。第 5 節は全体のまとめと今後の課題である。

## 2 定義

本節では、線形回帰モデルにおけるリッジ推定量を導入し、リッジ回帰における診断統計量として Cook の距離および尤度距離の定義をする。

### 2.1 線形回帰およびリッジ回帰

ここでは、線形回帰モデルとして、

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

を考える。このとき、 $\mathbf{y}$  は  $n \times 1$  の目的変数ベクトル、 $\mathbf{X}$  は  $n \times p$  のフルランクの説明変数行列、 $\beta$  は  $p \times 1$  の回帰係数ベクトル、そして  $\mathbf{e}$  は  $n \times 1$  の誤差ベクトルであり、正規分布  $N(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I}_n)$  に従うものとする。ただし、 $\mathbf{I}_n$  は  $n$  次の単位行列を表す。また、 $\beta$  の最小2乗推定量は  $\hat{\beta} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}$  として得られ、 $\sigma^2$  の不偏推定量は  $\hat{\sigma}^2 = \mathbf{e}'\mathbf{e}/(n-p)$  となる。ただし、「 $\prime$ 」は行列あるいはベクトルの転置を表し、 $\mathbf{e}$  は残差ベクトルであり、 $\mathbf{e} = \mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\beta} = (\mathbf{I}_n - \mathbf{H})\mathbf{y}$  である。このとき、 $\mathbf{H}$  は説明変数行列  $\mathbf{X}$  から構成されるハット行列 (hat matrix)  $\mathbf{H} = \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'$  であり、その第  $i$  対角成分  $h_{ii}$  がてこ比である。このてこ比については、 $1/n \leq h_{ii} < 1$  とする。さらに、残差ベクトル  $\mathbf{e}$  の第  $i$  成分  $e_i$  を標準化した  $t_i = e_i/(\hat{\sigma}\sqrt{1-h_{ii}})$  を標準化残差 (内的スチューデント化残差)、そしてこの  $t_i$  の定義式において  $\hat{\sigma}$  の代わりに  $\hat{\sigma}_{(i)}$  を用いた  $t_i^* = e_i/\{\hat{\sigma}_{(i)}\sqrt{1-h_{ii}}\}$  をスチューデント化残差 (外的スチューデント化残差) とする。ここで、添字の  $(\cdot)$  は  $n$  個の観測値の中から除去される観測値の番号を表す。

つぎに、 $t_i$  を第  $i$  成分とする標準化残差ベクトルを

$$\mathbf{t} = \frac{1}{\hat{\sigma}}[\text{diag}(\mathbf{I}_n - \mathbf{H})]^{-\frac{1}{2}}\mathbf{e}$$

とする。ただし、 $\text{diag}(\mathbf{A})$  は正方行列  $\mathbf{A}$  の対角成分のみを取り出し、非対角成分をすべて0にした行列を表す。同様に、 $t_i^*$  を第  $i$  成分とするスチューデント化残差ベクトルを

$$\mathbf{t}^* = \mathbf{D}^{-\frac{1}{2}}[\text{diag}(\mathbf{I}_n - \mathbf{H})]^{-\frac{1}{2}}\mathbf{e}$$

とする。ただし、

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_{(1)}^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \hat{\sigma}_{(2)}^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \hat{\sigma}_{(n)}^2 \end{pmatrix}$$

である。この両者については、 $\hat{\sigma}^2$  および  $\hat{\sigma}_{(i)}^2$  の関係式が、

$$\hat{\sigma}_{(i)}^2 = \frac{n-p-t_i^2}{n-p-1}\hat{\sigma}^2$$

であるので、 $t_i$  および  $t_i^*$  の関係式は、Weisberg[12] などから

$$t_i = t_i^* \sqrt{\frac{n-p}{n-p-1+t_i^{*2}}} \quad \text{または} \quad t_i^* = t_i \sqrt{\frac{n-p-1}{n-p-t_i^2}}$$

となる。

線形回帰の一つの代替的方法としてリッジ回帰がある (Hoerl and Kennard[3] や Groβ[2] など参照)。リッジ回帰においては、回帰係数ベクトル  $\beta$  の推定量 (以下、リッジ推定量) を、リッジパラメータ  $k(\geq 0)$  を使って、

$$\hat{\beta}^R \equiv (\mathbf{X}'\mathbf{X} + k\mathbf{I}_p)^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}$$

尤度距離におけるリッジパラメータに関する影響力

と定義する. すると, 最小 2 乗推定量の場合と同じく, 残差ベクトル  $e^R$  は,  $e^R = \mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\beta}^R = (\mathbf{I}_n - \mathbf{H}^R)\mathbf{y}$  となる. ただし, ハット行列  $\mathbf{H}^R$  は  $\mathbf{H}^R = \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X} + k\mathbf{I}_p)^{-1}\mathbf{X}'$  であり, その第  $i$  対角成分  $h_{ii}^R$  がリッジ回帰における  $t$  比である. このとき,  $0 < h_{ii}^R < 1$  である. また, 第  $i$  番目の観測値を除去したときの回帰係数ベクトル  $\beta$  の最小 2 乗推定量は  $\hat{\beta}_{(i)} = (\mathbf{X}'_{(i)}\mathbf{X}_{(i)})^{-1}\mathbf{X}'_{(i)}\mathbf{y}_{(i)}$  と定義されるので, これと同様に, 第  $i$  番目の観測値を除去したときのリッジ推定量を

$$\hat{\beta}_{(i)}^R = (\mathbf{X}'_{(i)}\mathbf{X}_{(i)} + k\mathbf{I}_p)^{-1}\mathbf{X}'_{(i)}\mathbf{y}_{(i)}$$

とする. このとき, 観測値除去に関してリッジパラメータ  $k$  は一定 (独立) であると仮定するが, 第 3 節においては観測値を固定した上で,  $k$  をある種の変数として扱う.

特に,  $k = 0$  とすれば,  $\hat{\beta}^R = \hat{\beta}$ ,  $\hat{\beta}_{(i)}^R = \hat{\beta}_{(i)}$ , あるいは  $\mathbf{H}^R = \mathbf{H}$  など, リッジ回帰の統計量が通常の線形回帰の統計量と一致することがわかる.

## 2.2 リッジ回帰における Cook の距離

第 3 節において, リッジ回帰における尤度距離をリッジパラメータに関して微分する際に, リッジ回帰における Cook の距離を利用するので, ここでその基本的な結果を与えておく.

リッジ回帰における Cook の距離  $CD_i^R$  は通常の線形回帰における Cook の距離を拡張することにより導入され, Takeuchi[8] から

$$CD_i^R \equiv \frac{(\hat{\beta}^R - \hat{\beta}_{(i)}^R)'(\mathbf{X}'\mathbf{X} + k\mathbf{I}_p)(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{X} + k\mathbf{I}_p)(\hat{\beta}^R - \hat{\beta}_{(i)}^R)}{p\hat{\sigma}^2} = \{s_i(c_i + d_i)\}^2 \quad (2.1)$$

と与えられる. ただし,  $c_i$  は

$$\mathbf{c} = \frac{1}{\sqrt{p}}\mathbf{\Pi}^{\frac{1}{2}}\mathbf{t}$$

の第  $i$  成分であり, このとき,

$$\mathbf{\Pi} = \text{diag}(\mathbf{H})[\text{diag}(\mathbf{I}_n - \mathbf{H})]^{-1}$$

であり, この第  $i$  対角成分が,  $\pi_i = h_{ii}/(1 - h_{ii})$  である. つぎに,  $d_i$  は

$$\mathbf{d} = \frac{1}{\sqrt{p}}\mathbf{\Pi}^{\frac{1}{2}}\mathbf{u}$$

の第  $i$  成分であり, このとき,

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\hat{\sigma}}[\text{diag}(\mathbf{I}_n - \mathbf{H})]^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{e}^R - \mathbf{e}) \quad (2.2)$$

である. 最後に,  $s_i$  は

$$\mathbf{S} = \text{diag}(\mathbf{I}_n - \mathbf{H})[\text{diag}(\mathbf{I}_n - \mathbf{H}^R)]^{-1}$$

の第  $i$  対角成分であり,  $s_i = (1 - h_{ii}) / (1 - h_{ii}^R)$  である. なお, 通常の線形回帰における Cook の距離  $CD_i$  は, (2.1) 式において  $k = 0$  を代入することによって

$$CD_i^R \Big|_{k=0} = CD_i \equiv \frac{(\hat{\beta} - \hat{\beta}_{(i)})' \mathbf{X}' \mathbf{X} (\hat{\beta} - \hat{\beta}_{(i)})}{p \hat{\sigma}^2} = c_i^2 \quad (2.3)$$

として得られる. (2.3) 式は, Takeuchi[6] の結果と同じである.

(2.1) 式で与えられるリッジ回帰における Cook の距離  $CD_i^R$  においては,  $\hat{\beta}^R - \hat{\beta}_{(i)}^R$  の中に挟まれる行列の選び方によっていくつかの定義式が考えられるが, ここでは,  $\hat{\beta}^R$  の分散共分散行列  $\text{Var}(\hat{\beta}^R) = \sigma^2 (\mathbf{X}' \mathbf{X} + k \mathbf{I}_p)^{-1} (\mathbf{X}' \mathbf{X}) (\mathbf{X}' \mathbf{X} + k \mathbf{I}_p)^{-1}$  の逆行列を選ぶものとする (たとえば, Walker and Birch[11] を参照).

さらに, リッジ回帰における Cook の距離  $CD_i^R$  をリッジパラメータ  $k$  に関して微分した結果が, Takeuchi[8] によって,  $DI_i$  (derivative index) として

$$DI_i \equiv \frac{\partial}{\partial k} CD_i^R = \frac{2}{k} \cdot CD_i^R \left( 1 + \frac{d_i^*}{c_i + d_i} - \frac{s_i}{s_i^*} \right) \quad (2.4)$$

と得られている. ただし,  $s_i^*$  は

$$\mathbf{S}^* = \text{diag}(\mathbf{I}_n - \mathbf{H}) [\text{diag}(\mathbf{I}_n - \mathbf{H}^{R2})]^{-1}$$

の第  $i$  対角成分であり,  $s_i^* = (1 - h_{ii}) / (1 - h_{ii}^{R2})$  である. このとき,  $h_{ii}^{R2}$  は  $\mathbf{H}^{R2} = (\mathbf{H}^R)^2$  の第  $i$  対角成分である. また,  $d_i^*$  は

$$d_i^* = \frac{1}{\sqrt{p}} \boldsymbol{\Pi}^{\frac{1}{2}} \mathbf{u}^*$$

の第  $i$  成分であり, このとき,

$$\mathbf{u}^* = \frac{1}{\hat{\sigma}} [\text{diag}(\mathbf{I}_n - \mathbf{H})]^{-\frac{1}{2}} (\mathbf{e}^{R2} - \mathbf{e}^R) \quad (2.5)$$

である. ここで,  $\mathbf{e}^{R2} = (\mathbf{I}_n - \mathbf{H}^{R2}) \mathbf{y}$  である.

なお, (2.4) 式においては  $k > 0$  とする. 一般に  $k$  の推定値は,  $0 \leq k \leq 1$  の間になるものが多い (Hoerl, Kennard and Baldwin[4] や Lawless and Wang[5] などを参照) ので, リッジ回帰における診断統計量をリッジパラメータに関して微分した結果である導関数についても,  $0 < k \leq 1$  の領域について主に検討する.

### 2.3 リッジ回帰における尤度距離

この節では, 竹内 [10] によって導出されたリッジ回帰における尤度距離を与える. Cook and Weisberg[1] において, 通常の線形回帰における尤度距離  $LD_i$  が定義され, この考え方をリッジ回帰の場合に適用することにより, 竹内 [10] は以下のように定義している.

$$LD_i^R \equiv 2[L(\hat{\beta}^R) - L(\hat{\beta}_{(i)}^R)] \quad (2.6)$$

尤度距離におけるリッジパラメータに関する影響力

ただし、通常の線形回帰の場合と同じく、

$$L(\hat{\beta}^R) : \beta \text{が} \hat{\beta}^R \text{のときの対数尤度} \quad \text{および} \quad L(\hat{\beta}_{(i)}^R) : \beta \text{が} \hat{\beta}_{(i)}^R \text{のときの対数尤度}$$

とする (具体的な対数尤度については竹内 [10] を参照). (2.6) 式の定義に基づいて、リッジ回帰における尤度距離  $\text{LD}_i^R$  を (2.1) 式の Cook の距離  $\text{CD}_i^R$  を利用して表現すると、

$$\begin{aligned} \text{LD}_i^R = n \log T_i + \frac{1}{T_i} \cdot \frac{n}{n-p} \left[ \frac{h_{ii}^{R2}}{h_{ii}} p \text{CD}_i^R + 2s_i(t_i + u_i)u_i^* \right] \\ + n \left( \frac{1}{T_i} - 1 \right) \left[ 1 + \frac{\mathbf{u}' \text{diag}(\mathbf{I}_n - \mathbf{H})\mathbf{u}}{n-p} \right] \end{aligned} \quad (2.7)$$

となる。ただし、

$$T_i = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n-p-t_i^2}{n-p} = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n-p-1}{n-p-1+t_i^2}$$

であり、 $u_i$  は (2.2) 式の  $\mathbf{u}$  の第  $i$  成分、それに  $u_i^*$  は (2.5) 式の  $\mathbf{u}^*$  の第  $i$  成分である。

特に、リッジパラメータ  $k$  が  $k=0$  のとき、リッジ回帰における尤度距離  $\text{LD}_i^R$  は、竹内 [10] から

$$\text{LD}_i^R \Big|_{k=0} = \text{LD}_i = n \log T_i + \frac{1}{T_i} \cdot \frac{np}{n-p} \text{CD}_i + n \left( \frac{1}{T_i} - 1 \right)$$

として得られる。つまり、 $k=0$  の場合は、通常の線形回帰における尤度距離  $\text{LD}_i$  に一致する。

### 3 尤度距離の導関数

(2.7) 式の尤度距離をリッジパラメータ  $k$  に関して微分することにより、その導関数を求める。得られた導関数により、リッジパラメータに基づいて尤度距離に対する観測値の影響力を補助的に調べることが可能となる。

リッジ回帰における尤度距離  $\text{LD}_i^R$  のリッジパラメータ  $k$  に関する導関数を導くために、 $t_i$ 、 $u_i$  および  $u_i^*$  をそれぞれ  $c_i$ 、 $d_i$  および  $d_i^*$  に変形する。この結果、付録 1 から尤度距離  $\text{LD}_i^R$  の  $k$  に関する導関数  $\text{DL}_i$  は

$$\begin{aligned} \text{DL}_i &\equiv \frac{\partial}{\partial k} \text{LD}_i^R \\ &= \frac{2}{k} \cdot \frac{n}{n-p} \left[ \frac{p}{T_i} \cdot \frac{s_i}{\pi_i} \left\{ \left( \frac{1}{s_i s_i^*} - \frac{1}{s_i s_i^{**}} + \pi_i^* \left( \frac{1}{s_i} - \frac{1}{s_i^*} \right) \right) \text{CD}_i^R \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (c_i + d_i) \left( s_i \left( \pi_i^* - \frac{1}{s_i^*} \right) d_i^* + 2d_i^{**} \right) + (d_i^*)^2 \right\} + \left( \frac{1}{T_i} - 1 \right) \mathbf{u}' \text{diag}(\mathbf{I}_n - \mathbf{H})\mathbf{u}^* \right] \end{aligned} \quad (3.1)$$

として得られる。ただし、 $\pi_i^*$  は

$$\mathbf{\Pi}^* = \text{diag}(\mathbf{H}^{R2})[\text{diag}(\mathbf{I}_n - \mathbf{H})]^{-1}$$

の第  $i$  対角成分であり,  $\pi_i^* = h_{ii}^{R2}/(1 - h_{ii})$  である. また,  $s_i^{**}$  は

$$\mathbf{S}^{**} = \text{diag}(\mathbf{I}_n - \mathbf{H})[\text{diag}(\mathbf{I}_n - \mathbf{H}^{R3})]^{-1}$$

の第  $i$  対角成分であり,  $s_i^{**} = (1 - h_{ii})/(1 - h_{ii}^{R3})$  である. このとき,  $h_{ii}^{R3}$  は  $\mathbf{H}^{R3} = (\mathbf{H}^R)^3$  の第  $i$  対角成分である. さらに,  $d_i^{**}$  は

$$\mathbf{d}^{**} = \frac{1}{\sqrt{p}} \mathbf{\Pi}^{\frac{1}{2}} \mathbf{u}^{**}$$

の第  $i$  成分であり, このとき,

$$\mathbf{u}^{**} = \frac{1}{\sigma} [\text{diag}(\mathbf{I}_n - \mathbf{H})]^{-\frac{1}{2}} (\mathbf{e}^{R3} - \mathbf{e}^{R2})$$

である. ここで,  $\mathbf{e}^{R3} = (\mathbf{I}_n - \mathbf{H}^{R3})\mathbf{y}$  である.

(3.1) 式において, 最終項の  $\mathbf{u}' \text{diag}(\mathbf{I}_n - \mathbf{H}) \mathbf{u}^*$  については,  $k$  の関数ではあるが, 第  $i$  番目の観測値とは無関係に定まるので,  $\mathbf{d}$  および  $\mathbf{d}^*$  を利用した表現に直していない. この部分についても敢えて式変形をすれば,

$$\mathbf{u}' \text{diag}(\mathbf{I}_n - \mathbf{H}) \mathbf{u}^* = p \mathbf{d}' \mathbf{\Pi}^{-\frac{1}{2}} \text{diag}(\mathbf{I}_n - \mathbf{H}) \mathbf{\Pi}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{d}^*$$

となるので, (3.1) 式は

$$\begin{aligned} \text{DL}_i = & \frac{2}{k} \cdot \frac{np}{n-p} \left[ \frac{1}{T_i} \cdot \frac{s_i}{\pi_i} \left\{ \left( \frac{1}{s_i s_i^*} - \frac{1}{s_i s_i^{**}} + \pi_i^* \left( \frac{1}{s_i} - \frac{1}{s_i^*} \right) \right) \text{CD}_i^R \right. \right. \\ & \left. \left. + (c_i + d_i) \left( s_i \left( \pi_i^* - \frac{1}{s_i^*} \right) d_i^* + 2d_i^{**} \right) + (d_i^*)^2 \right\} + \left( \frac{1}{T_i} - 1 \right) \mathbf{d}' \mathbf{\Pi}^{-\frac{1}{2}} \text{diag}(\mathbf{I}_n - \mathbf{H}) \mathbf{\Pi}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{d}^* \right] \end{aligned}$$

と表現することもできる.

## 4 数値例

(3.1) 式で与えられるリッジパラメータ  $k$  に関する導関数  $\text{DL}_i$  に基づいて, 除去される観測値の性質を調べるために, 実際のデータに対して数値計算を行う. 数値計算をするためのデータとしては, Takeuchi[8] において例示されている「Artificial Data」(データ数は  $n = 20$  であり, 説明変数の数は定数項を含め  $p = 4 + 1 = 5$ ) を利用する. これは, 竹内[10] で利用した数値例と同じものである. よって, その数値例において, リッジ回帰における尤度距離  $\text{LD}_i^R$  の計算はすでに示されているので, その導関数  $\text{DL}_i$  の挙動について主に検討をする.

すべての観測値に対する  $\text{DL}_i$  の挙動を示した結果は図 4.1 のとおりである(観測値番号は省略). 図 4.1 において, グラフの横軸はリッジパラメータ  $k$  であり, 縦軸は導関数  $\text{DL}_i$  である. 各観測値の  $\text{DL}_i$  の数値計算においては,  $0 < k \leq 1$  の範囲を 0.01 から 0.01 刻みで 1.00 まで算出し, これら 100 個の点を基にグラフ化している. どの観測値についても  $\text{DL}_i$  は  $k$  に関して滑らかな関数であり,  $k$  の値が増加すると大部分の観測値について,  $\text{DL}_i = 0$  に近づく傾向が見られる. また,

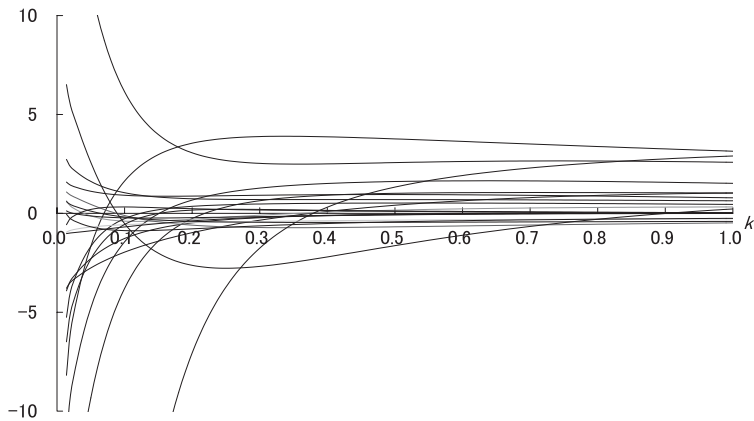


図 4.1 すべての観測値に対する導関数  $DL_i$  のグラフ

$k > 0.1$  の範囲では概ね  $DL_i$  の絶対値は 5 を下回っていることもわかる。さらに、 $k > 1$  の範囲における正確な挙動は不明であるが、概ね  $k$  の値が増加すると一定値に収束することが予想される。この根拠は、 $k$  の値が 1 よりも大きくなると、(3.1) 式における係数  $2/k$  の変化量が、 $k$  の関数である  $s_i$  や  $d_i$  などの統計量よりも大きく影響するものと想定されるからである。たとえば、 $k \rightarrow \infty$  のような極端な場合を考えると、 $s_i$  や  $d_i$  などの値の変化よりも係数  $2/k$  の変化の方が大きく（速く）なり、 $DL_i \rightarrow 0$  となるが、その途中である  $1 < k < \infty$  における  $DL_i$  の収束の速さはデータの特性に依存するものと考えられる。

特に、竹内 [10] の数値例から  $LD_i^R$  において影響力が大きいと判断された 3 個の観測値 No.2, No.10 それに No.14 と、 $DL_i$  の挙動として特徴的な観測値 No.17 についてのみ、図 4.1 から分離して図 4.2 としてまとめている。この結果、No.2 と No.10 については、 $DL_i = 0$  となる  $k$  が  $0 < k \leq 1$  の範囲内に 1 つ存在することがわかる。観測値 No.14 については  $DL_i > 0$  である ( $DL_i$  自体は単調減少関数) ので、 $LD_i^R$  については  $k$  に関して単調増加関数である。こうした  $DL_i$  の挙動は、竹内 [10] の  $LD_i^R$  に対する数値例のグラフからも読み取ることができ、本研究からも明示的に説明することが可能であるといえる。

新たな知見としては、観測値 No.17 の場合である。図 4.2 からわかるように、 $DL_i = 0$  となる  $k$  が  $0 < k \leq 1$  の範囲内に 2 つ存在するのである。導関数の数値が小さいため、つまり  $LD_i^R$  の変化が小さいため (図 4.3 で示されるように  $LD_i^R$  の値が  $\pm 0.8$  という狭い範囲に収まるため) に、 $LD_i^R$



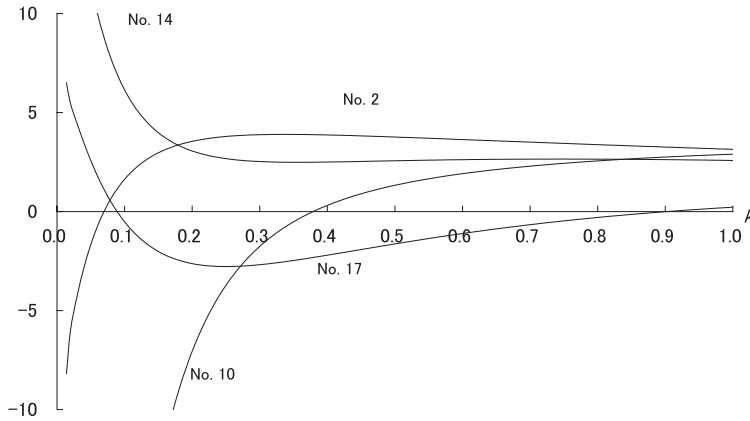


図 4.2 特徴的な観測値に対する導関数  $DL_i^R$  のグラフ

のグラフとしては目立った変化は見受けられなかった(竹内 [10] の図 4.1 から, 他の 3 個の観測値については  $LD_i^R$  の値が +2 よりも大きくなることが示されている). けれども,  $DL_i^R$  の挙動を調べることで,  $LD_i^R$  についてこのような新たな傾向を特徴として見出すことができたのである.

したがって,  $LD_i^R$  の変化を, その導関数  $DL_i^R$  の挙動から調べると, 単調増加 (または減少) 関数になる観測値,  $DL_i^R = 0$  となる  $k$  が  $0 < k \leq 1$  の範囲内に 1 つ存在する観測値, それに  $DL_i^R = 0$  となる  $k$  が  $0 < k \leq 1$  の範囲内に 2 つ存在する観測値の 3 つの種類に分類できるのである. これは, 数値例として取り上げたデータに基づく特徴であるが, この他のデータについても基本的な性質として適用できると思われる. この数値例は乱数を発生させることにより得られたデータに基づいているので, 極端に例外的な挙動を示すデータ構造を持たなければ, このような性質がほぼあてはまるものと考えられる. よって, 観測値除去法に基づく影響力評価においては, 最適なリッジパラメータ  $k$  を 1 つに定めることが多いが, 2 つの候補がある場合も存在することが数値例から新たに判明した.

## 5 まとめと今後の課題

本論文では, リッジ回帰における尤度距離  $LD_i^R$  の詳細な挙動を調べるために, リッジパラメータ  $k$  に関する導関数  $DL_i^R$  を導出した. また, 実際のデータを基にして, リッジパラメータ  $k$  に関する尤度距離  $LD_i^R$  の変化を, その導関数  $DL_i^R$  の数値的な挙動を調べることで, 観測値の性格

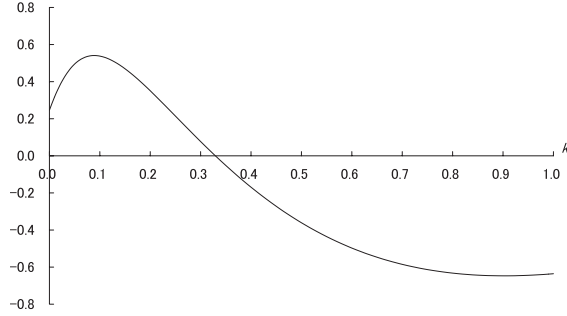


図 4.3 観測値 No.17 に対する尤度距離  $LD_i^R$  のグラフ

によって概ね3種類の傾向があることもわかった。

今後の課題としては、個々の観測値に対する影響力評価に加えて複数個の観測値の場合 (multiple-case) においても、リッジパラメータ  $k$  に関する尤度距離  $LD_i^R$  (正確には、観測値集合を  $I$  として  $LD_I^R$ ) の導関数  $DL_i$  (同じく正確には  $DL_I$ ) について検討をすることが考えられる。また、実際のデータに対して数値的な観点から個別研究することも重要であるが、理論的に  $DL_i$  の特徴を調べるためには、 $DL_i = 0$  を満たす  $k$  の値について、観測値ごとのバラツキなどを詳細に考慮して検討する必要もある。けれども、(3.1) 式の  $DL_i$  から  $k$  の値を解析的に求め、陽な形式で表すことは容易ではないので、この点についても代替的な方法の考案を含め今後の検討課題としたい。

## 付録 1: $DL_i$ の導出

以下の付録 2(付録 2.1 ~ 2.6) および (2.4) 式のリッジ回帰における Cook の距離の導関数  $DL_i$  を利用して、リッジ回帰における尤度距離  $LD_i^R$  のリッジパラメータ  $k$  に関する微分を計算する。(2.7) 式を  $k$  に関して微分すると、

$$\begin{aligned}
 DL_i &\equiv \frac{\partial}{\partial k} LD_i^R \\
 &= \frac{1}{T_i} \cdot \frac{n}{n-p} \left[ \frac{p}{h_{ii}} \left\{ \frac{\partial h_{ii}^{R2}}{\partial k} CD_i^R + h_{ii}^{R2} \frac{\partial}{\partial k} CD_i^R \right\} \right. \\
 &\quad \left. + 2 \left\{ \frac{\partial s_i}{\partial k} (t_i + u_i) u_i^* + s_i \frac{\partial u_i}{\partial k} u_i^* + s_i (t_i + u_i) \frac{\partial u_i^*}{\partial k} \right\} \right] + \frac{n}{n-p} \left( \frac{1}{T_i} - 1 \right) \frac{\partial}{\partial k} \mathbf{u}' \text{diag}(\mathbf{I}_n - \mathbf{H}) \mathbf{u} \\
 &= \frac{1}{T_i} \cdot \frac{n}{n-p} \left[ \frac{p}{h_{ii}} \left\{ \frac{2(h_{ii}^{R3} - h_{ii}^{R2})}{k} CD_i^R + h_{ii}^{R2} \frac{2}{k} \cdot CD_i^R \left( 1 + \frac{d_i^*}{c_i + d_i} - \frac{s_i}{s_i^*} \right) \right\} \right. \\
 &\quad \left. + 2 \left\{ \frac{s_i}{k} \left( 1 - \frac{s_i}{s_i^*} \right) (t_i + u_i) u_i^* + s_i \frac{u_i^*}{k} u_i^* + s_i (t_i + u_i) \frac{2u_i^{**} - u_i^*}{k} \right\} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{n}{n-p} \left( \frac{1}{T_i} - 1 \right) \frac{2}{k} \mathbf{u}' \text{diag}(\mathbf{I}_n - \mathbf{H}) \mathbf{u}^* \\
 = & \frac{2}{k} \cdot \frac{n}{n-p} \left[ \frac{1}{T_i} \left( \frac{p}{h_{ii}} \left\{ h_{ii}^{R3} - h_{ii}^{R2} + h_{ii}^{R2} \left( 1 + \frac{d_i^*}{c_i + d_i} - \frac{s_i}{s_i^*} \right) \right\} \text{CD}_i^R \right. \right. \\
 & \left. \left. + s_i \left\{ \left( 1 - \frac{s_i}{s_i^*} \right) (t_i + u_i) u_i^* + (u_i^*)^2 + (t_i + u_i) (2u_i^{**} - u_i^*) \right\} \right) \right. \\
 & \left. + \left( \frac{1}{T_i} - 1 \right) \mathbf{u}' \text{diag}(\mathbf{I}_n - \mathbf{H}) \mathbf{u}^* \right] \\
 = & \frac{2}{k} \cdot \frac{n}{n-p} \left[ \frac{1}{T_i} \left( \frac{p}{h_{ii}} \left\{ h_{ii}^{R3} - h_{ii}^{R2} \frac{s_i}{s_i^*} \right\} \text{CD}_i^R + p \frac{1 - h_{ii}}{h_{ii}} \cdot \frac{h_{ii}^{R2}}{1 - h_{ii}} \cdot \frac{d_i^*}{c_i + d_i} s_i^2 (c_i + d_i)^2 \right. \right. \\
 & \left. \left. + s_i \frac{p}{\pi_i} \left\{ (c_i + d_i) (2d_i^{**} - \frac{s_i}{s_i^*} d_i^*) + (d_i^*)^2 \right\} \right) + \left( \frac{1}{T_i} - 1 \right) \mathbf{u}' \text{diag}(\mathbf{I}_n - \mathbf{H}) \mathbf{u}^* \right] \\
 = & \frac{2}{k} \cdot \frac{n}{n-p} \left[ \frac{p}{T_i} \left( \frac{1 - h_{ii}}{h_{ii}} \left\{ \frac{-(1 - h_{ii}^{R3}) + (1 - h_{ii}^{R2}) + h_{ii}^{R2} (1 - \frac{s_i}{s_i^*})}{1 - h_{ii}} \right\} \text{CD}_i^R \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{s_i}{\pi_i} \left\{ (c_i + d_i) (2d_i^{**} - \frac{s_i}{s_i^*} d_i^* + \frac{h_{ii}^{R2}}{1 - h_{ii}} s_i d_i^*) + (d_i^*)^2 \right\} \right) \right. \\
 & \left. + \left( \frac{1}{T_i} - 1 \right) \mathbf{u}' \text{diag}(\mathbf{I}_n - \mathbf{H}) \mathbf{u}^* \right] \\
 = & \frac{2}{k} \cdot \frac{n}{n-p} \left[ \frac{p}{T_i} \left( \frac{1}{\pi_i} \left\{ -\frac{1}{s_i^{**}} + \frac{1}{s_i^*} + \pi_i^* (1 - \frac{s_i}{s_i^*}) \right\} \text{CD}_i^R \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{s_i}{\pi_i} \left\{ (c_i + d_i) [2d_i^{**} + s_i (\pi_i^* - \frac{1}{s_i^*}) d_i^*] + (d_i^*)^2 \right\} \right) + \left( \frac{1}{T_i} - 1 \right) \mathbf{u}' \text{diag}(\mathbf{I}_n - \mathbf{H}) \mathbf{u}^* \right] \\
 = & \frac{2}{k} \cdot \frac{n}{n-p} \left[ \frac{p}{T_i} \cdot \frac{s_i}{\pi_i} \left\{ \left( \frac{1}{s_i s_i^*} - \frac{1}{s_i s_i^{**}} + \pi_i^* \left( \frac{1}{s_i} - \frac{1}{s_i^*} \right) \right) \text{CD}_i^R \right. \right. \\
 & \left. \left. + (c_i + d_i) \left( s_i (\pi_i^* - \frac{1}{s_i^*}) d_i^* + 2d_i^{**} \right) + (d_i^*)^2 \right\} + \left( \frac{1}{T_i} - 1 \right) \mathbf{u}' \text{diag}(\mathbf{I}_n - \mathbf{H}) \mathbf{u}^* \right]
 \end{aligned}$$

となり, (3.1) 式の導関数を得ることができる。

## 付録 2: 基本要素の微分

上記の付録 1 において利用した基本要素のリッジパラメータ  $k$  に関する微分について, それらの結果を個々に示す。

### 付録 2.1: $h_{ii}^R$ の微分

説明変数行列  $\mathbf{X}$  を以下のように特異値分解する。

$$\mathbf{X} = \mathbf{L} \mathbf{G}^{\frac{1}{2}} \mathbf{U}'$$

ただし,  $\mathbf{G}$  は  $p \times p$  の対角行列であり, その第  $j$  対角成分は  $\mathbf{X}'\mathbf{X}$  の第  $j$  固有値  $\delta_j (> 0)$  である。その第  $j$  固有値  $\delta_j$  に対応する固有ベクトルを第  $j$  列にもつ行列が  $\mathbf{U}$  であり,  $p \times p$  の正方行列にな

尤度距離におけるリッジパラメータに関する影響力

り  $\mathbf{U}'\mathbf{U} = \mathbf{U}\mathbf{U}' = \mathbf{I}_p$  を満たす。また、 $\mathbf{L}$  は  $n \times p$  の行列であり  $\mathbf{L}'\mathbf{L} = \mathbf{I}_p$  を満たす。

$h_{ii}^R$  は  $\mathbf{H}^R = \mathbf{L}(\mathbf{I}_p + k\mathbf{G}^{-1})^{-1}\mathbf{L}'$  の第  $i$  対角成分であるので、

$$h_{ii}^R = \mathbf{x}_i(\mathbf{X}'\mathbf{X} + k\mathbf{I}_p)^{-1}\mathbf{x}_i' = \ell_i(\mathbf{I}_p + k\mathbf{G}^{-1})^{-1}\ell_i' = \sum_{j=1}^p \frac{\delta_j}{\delta_j + k} \ell_{ij}^2$$

となる。ただし、 $\mathbf{x}_i$  は  $\mathbf{X}$  の第  $i$  行 (ベクトル) であり、 $\ell_i$  は  $\mathbf{L}$  の第  $i$  行 (ベクトル) であり、 $\ell_{ij}$  は  $\mathbf{L}$  の第  $(i, j)$  成分、つまり  $\ell_i$  の第  $j$  成分を表す。そこで、 $h_{ii}^R$  を  $k$  に関して微分すると、

$$\frac{\partial h_{ii}^R}{\partial k} = \frac{\partial}{\partial k} \sum_{j=1}^p \frac{\delta_j}{\delta_j + k} \ell_{ij}^2 = \sum_{j=1}^p \ell_{ij}^2 \frac{\partial}{\partial k} \frac{\delta_j}{\delta_j + k} = - \sum_{j=1}^p \frac{\delta_j}{(\delta_j + k)^2} \ell_{ij}^2$$

となる。これを式変形すると、 $k > 0$  なので

$$\frac{\partial h_{ii}^R}{\partial k} = - \sum_{j=1}^p \frac{\delta_j}{(\delta_j + k)^2} \ell_{ij}^2 = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^p \left[ \left( \frac{\delta_j}{\delta_j + k} \right)^2 - \frac{\delta_j}{\delta_j + k} \right] \ell_{ij}^2$$

となる。ところで、 $\mathbf{H}^{R2} = (\mathbf{H}^R)^2 = \mathbf{L}(\mathbf{I}_p + k\mathbf{G}^{-1})^{-2}\mathbf{L}'$  であるので、この第  $i$  対角成分は

$$h_{ii}^{R2} = \sum_{j=1}^p \left( \frac{\delta_j}{\delta_j + k} \right)^2 \ell_{ij}^2 \quad (\text{A.1})$$

と表すこともできる。したがって、

$$\frac{\partial h_{ii}^R}{\partial k} = \frac{h_{ii}^{R2} - h_{ii}^R}{k}$$

となる。

## 付録 2.2: $h_{ii}^{R2}$ の微分

付録 2.1 と同様に、 $h_{ii}^{R2}$  を  $\mathbf{X}'\mathbf{X}$  の固有値および固有ベクトルの成分によって表してから、 $k$  に関して微分をする。 $h_{ii}^{R2}$  は  $\mathbf{H}^{R2}$  の第  $i$  対角成分であり、付録 2.1 における (A.1) 式のように固有値および固有ベクトルの成分によって表されるので、

$$\frac{\partial h_{ii}^{R2}}{\partial k} = - \sum_{j=1}^p \frac{2\delta_j^2}{(\delta_j + k)^3} \ell_{ij}^2 = \frac{2}{k} \sum_{j=1}^p \left[ \left( \frac{\delta_j}{\delta_j + k} \right)^3 - \left( \frac{\delta_j}{\delta_j + k} \right)^2 \right] \ell_{ij}^2$$

となる。ここでも付録 2.1 と同じく、 $\mathbf{H}^{R3} = (\mathbf{H}^R)^3 = \mathbf{L}(\mathbf{I}_p + k\mathbf{G}^{-1})^{-3}\mathbf{L}'$  であるので、この第  $i$  対角成分は

$$h_{ii}^{R3} = \sum_{j=1}^p \left( \frac{\delta_j}{\delta_j + k} \right)^3 \ell_{ij}^2$$

と表すことができる。よって、

$$\frac{\partial h_{ii}^{R2}}{\partial k} = \frac{2(h_{ii}^{R3} - h_{ii}^{R2})}{k}$$

となる。

付録 2.3:  $s_i$  の微分

$s_i$  の  $k$  に関する微分は,

$$\frac{\partial s_i}{\partial k} = \frac{\partial}{\partial k} \frac{1 - h_{ii}}{1 - h_{ii}^R} = (1 - h_{ii}) \frac{\partial}{\partial k} \frac{1}{1 - h_{ii}^R} = (1 - h_{ii}) \frac{1}{(1 - h_{ii}^R)^2} \frac{\partial h_{ii}^R}{\partial k}$$

となるので, 付録 2.1 の結果を利用すると,

$$\frac{\partial s_i}{\partial k} = \frac{1 - h_{ii}}{(1 - h_{ii}^R)^2} \cdot \frac{h_{ii}^{R2} - h_{ii}^R}{k} = \frac{1}{k} \cdot \frac{1 - h_{ii}}{1 - h_{ii}^R} \cdot \frac{1 - h_{ii}^R - (1 - h_{ii}^{R2})}{1 - h_{ii}^R} = \frac{s_i}{k} \left( 1 - \frac{\frac{1 - h_{ii}}{1 - h_{ii}^R}}{\frac{1 - h_{ii}}{1 - h_{ii}^{R2}}} \right) = \frac{s_i}{k} \left( 1 - \frac{s_i}{s_i^*} \right)$$

と変形することができる.

付録 2.4:  $u_i$  の微分

$u_i$  の  $k$  に関する微分は, (2.2) 式の  $\mathbf{u}$  に基づいて

$$\frac{\partial}{\partial k} \mathbf{u} = \frac{1}{\sigma} [\text{diag}(\mathbf{I}_n - \mathbf{H})]^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial k} \mathbf{e}^R$$

の第  $i$  成分を考えることと同じである.  $\mathbf{e}^R = (\mathbf{I}_n - \mathbf{H}^R)\mathbf{y}$  から,

$$\frac{\partial}{\partial k} \mathbf{e}^R = -\frac{\partial}{\partial k} \mathbf{H}^R \mathbf{y}$$

となるので, この第  $i$  成分は付録 2.1 と同様に  $\mathbf{X}'\mathbf{X}$  の固有値および固有ベクトルの成分を利用して

$$\frac{\partial e_i^R}{\partial k} = -\frac{\partial}{\partial k} \ell_i (\mathbf{I}_p + k\mathbf{G}^{-1})^{-1} \mathbf{L}'\mathbf{y} = -\frac{1}{k} \sum_{j=1}^p \left[ \left( \frac{\delta_j}{\delta_j + k} \right)^2 - \frac{\delta_j}{\delta_j + k} \right] \ell_{ij} m_j$$

となる. ただし,  $e_i^R$  は  $\mathbf{e}^R$  の第  $i$  成分であり,  $m_j$  は列ベクトル  $\mathbf{m} = \mathbf{L}'\mathbf{y}$  の第  $j$  成分である. よって, ベクトルに戻して考えると,

$$\frac{\partial}{\partial k} \mathbf{e}^R = \frac{1}{k} (\mathbf{H}^R - \mathbf{H}^{R2})\mathbf{y} = \frac{1}{k} \{ (\mathbf{I}_n - \mathbf{H}^{R2})\mathbf{y} - (\mathbf{I}_n - \mathbf{H}^R)\mathbf{y} \} = \frac{1}{k} (\mathbf{e}^{R2} - \mathbf{e}^R)$$

となるので,

$$\frac{\partial}{\partial k} \mathbf{u} = \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{\sigma} [\text{diag}(\mathbf{I}_n - \mathbf{H})]^{-\frac{1}{2}} (\mathbf{e}^{R2} - \mathbf{e}^R) = \frac{1}{k} \mathbf{u}^*$$

と得られる. したがって, この両辺の第  $i$  成分から

$$\frac{\partial u_i}{\partial k} = \frac{u_i^*}{k}$$

となる.

尤度距離におけるリッジパラメータに関する影響力

### 付録 2.5: $u_i^*$ の微分

$u_i^*$  の  $k$  に関する微分は, (2.5) 式の  $\mathbf{u}^*$  に基づいて

$$\frac{\partial}{\partial k} \mathbf{u}^* = \frac{1}{\hat{\sigma}} [\text{diag}(\mathbf{I}_n - \mathbf{H})]^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial k} (\mathbf{e}^{R2} - \mathbf{e}^R)$$

となるので, 右辺第 1 項の  $\mathbf{e}^{R2}$  に関する部分の微分がわかればよい. 付録 2.4 と同様にして,

$$\frac{\partial e_i^{R2}}{\partial k} = -\frac{\partial}{\partial k} \ell_i (\mathbf{I}_p + k\mathbf{G}^{-1})^{-2} \mathbf{L}' \mathbf{y} = -\frac{2}{k} \sum_{j=1}^p \left[ \left( \frac{\delta_j}{\delta_j + k} \right)^3 - \left( \frac{\delta_j}{\delta_j + k} \right)^2 \right] \ell_{ij} m_j$$

となる. よって, ベクトルに戻して考えると,

$$\frac{\partial}{\partial k} \mathbf{e}^{R2} = \frac{2}{k} (\mathbf{H}^{R2} - \mathbf{H}^{R3}) \mathbf{y} = \frac{2}{k} \{ (\mathbf{I}_n - \mathbf{H}^{R3}) \mathbf{y} - (\mathbf{I}_n - \mathbf{H}^{R2}) \mathbf{y} \} = \frac{2}{k} (\mathbf{e}^{R3} - \mathbf{e}^{R2})$$

となるので,

$$\frac{\partial}{\partial k} \mathbf{u}^* = \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{\hat{\sigma}} [\text{diag}(\mathbf{I}_n - \mathbf{H})]^{-\frac{1}{2}} \{ 2(\mathbf{e}^{R3} - \mathbf{e}^{R2}) - (\mathbf{e}^{R2} - \mathbf{e}^R) \} = \frac{1}{k} (2\mathbf{u}^{**} - \mathbf{u}^*)$$

と得られる. したがって, この両辺の第  $i$  成分から

$$\frac{\partial u_i^*}{\partial k} = \frac{2u_i^{**} - u_i^*}{k}$$

となる.

### 付録 2.6: $\mathbf{u}' \text{diag}(\mathbf{I}_n - \mathbf{H}) \mathbf{u}$ の微分

上記の付録 2.4 の場合と同様に,  $\mathbf{u}$  を  $k$  に関して微分する.

$$\mathbf{u}' \text{diag}(\mathbf{I}_n - \mathbf{H}) \mathbf{u} = \sum_{i=1}^n (1 - h_{ii}) u_i^2$$

であるので, 付録 2.4 から, 第  $i$  成分については

$$\frac{\partial u_i^2}{\partial k} = 2u_i \frac{\partial u_i}{\partial k} = \frac{2}{k} u_i u_i^*$$

となる. よって,

$$\frac{\partial}{\partial k} \mathbf{u}' \text{diag}(\mathbf{I}_n - \mathbf{H}) \mathbf{u} = \frac{2}{k} \sum_{i=1}^n (1 - h_{ii}) u_i u_i^* = \frac{2}{k} \mathbf{u}' \text{diag}(\mathbf{I}_n - \mathbf{H}) \mathbf{u}^*$$

となる.

## 参考文献

- [1] Cook, R. D. and Weisberg, S. (1982), *Residuals and Influence in Regression*, New York: Chapman and Hall.
- [2] Groß, J. (2003), *Linear Regression*, Berlin: Springer.
- [3] Hoerl, A. E. and Kennard, R. W. (1970), Ridge regression: biased estimation for nonorthogonal problems, *Technometrics*, **12**, 55–67.
- [4] Hoerl, A. E., Kennard, R. W. and Baldwin, K. F. (1975), Ridge regression: some simulations, *Communications in Statistics — Theory and Methods*, **4**, 105–123.
- [5] Lawless, J. F. and Wang, P. (1976), A simulation study of ridge and other regression estimators, *Communications in Statistics — Theory and Methods*, **5**, 307–323.
- [6] Takeuchi, H. (1991), Detecting influential observations by using a new expression of Cook's distance, *Communications in Statistics — Theory and Methods*, **20**, 261–274.
- [7] Takeuchi, H. (1993), Influence analysis with an extension of covariance ratio in ridge regression, 静岡県立大学経営情報学部報「経営と情報」, **5**, 9–17.
- [8] Takeuchi, H. (1994), Sensitivity analysis with an extension of Cook's distance in ridge regression, *Journal of the Japan Statistical Society*, **24**, 221–236.
- [9] 竹内秀一 (1997), リッジ回帰における診断統計量の代替表現, 東京経大会誌, **203**号, 5–18.
- [10] 竹内秀一 (2007), リッジ回帰における尤度距離による影響力評価, 人文自然科学論集, **123**号, 3–16.
- [11] Walker, E. and Birch, J. B. (1988), Influence measures in ridge regression, *Technometrics*, **30**, 221–227 (Correction **30**, 469–470).
- [12] Weisberg, S. (2005), *Applied Linear Regression*, 3rd edition, New York: Wiley.