論　文

数値実験に基づくリッジパラメータの推定量の比較

竹　内　秀　一

A Comparison of Estimators of the Ridge Parameter through a Simulation Study

Hidekazu TAKEUCHI

One of the biggest challenges when using ridge regression to perform linear regression is the selection of the ridge parameter. In this paper, through the application of a ridge estimator to the likelihood distance (an influence measure based on the log-likelihood criterion), we propose an assessment criterion and verify it via a simulation study for selecting the appropriate ridge estimator for a ridge parameter. Investigation has already been carried out for typical data, but adequate consideration has not been given to data structures that depend on the condition number, which is a measure for gauging multicollinearity (a problem when applying ridge regression). In order to include such characteristic ridge regression problems in our investigation, we construct a number of representative data structures based on the simulation study. Then, for these representative data structures, existing estimators and newly proposed estimators are compared as estimators of the ridge parameter, after which we verify which estimators are effective in which situations.

1　はじめに

線形回帰分析における観測値の影響力評価を，Hoerl and Kennard[3] によって提案されたリッジ回帰 (ridge regression) へ応用する場合の大きな課題の１つは，リッジパラメータの選定方法が明確になっていないことである．本論文では，対数尤度規準に基づく診断統計量 (influence measure) である尤度距離 (likelihood distance) に対してリッジ推定量を適用する (竹内 [8][9][10] を参照) ことによりある１つの評価規準を与え，どのようなリッジパラメータの推定量の選定が適切であるのかを数値実験に基づいて検証する．

これまでにも，竹内 [10] により，典型的なデータに対する検証は行われているが，リッジ回帰を適用する際に問題となる多重共線性 (muticollinearity) を測る尺度の１つである条件数 (condition number) に依存するデータ構造については十分な検討がされていない．このようなリッジ回帰固有の問題も含めた検討を行うために，いくつかの代表的なデータ構造を数値実験に基づいて構築する．

こうした代表的なデータ構造に対して，リッジパラメータの推定量として何が有効であるのかを比較検討する．本論文では，Hoerl, Kennard and Baldwin[4] および Lawless and Wang[5] によって提案されている従来の推定量に加えて，竹内 [10] が提案する新しい 2 つの推定量と合せて 4 つの推定量を取り上げる．これらの推定量の有効性を，リッジ推定量に基づく尤度距離を利用したある指標を評価規準とすることにより調べる．特に，リッジパラメータの推定量として，説明変数行列に基づく条件数および誤差ベクトルの誤差分散 (正確には誤差の標準偏差) の大小関係によるいくつかのデータ構造に対して，どれが有効に機能するのかを数値実験により確認する．この結果，竹内 [10] において提案された新たなリッジパラメータの推定量が有効なケースとあまり有効でないケースが明確になった．

本論文の構成は以下のとおりである．第 2 節では各種の基本的な統計量，リッジ推定量に基づく尤度距離とその導関数，それにリッジパラメータの推定量とその評価規準を定義する．第 3 節において，リッジパラメータの推定量を比較検討するために，説明変数行列に基づく条件数および誤差ベクトルの誤差分散 (正確には誤差の標準偏差) を中心として調整することによりいくつかのデータ構造を設定する．第 4 節では，設定されたデータ構造に対して，リッジパラメータの 4 つの推定量がどのような場合に有効性を発揮するのかについて比較検討する．第 5 節は全体のまとめと今後の課題である．

2　定義

本節では，線形回帰モデルに対してリッジ回帰を適用した場合における各種の基本的な統計量を与える．つぎに，リッジ推定量に基づく診断統計量として尤度距離を定義し，その導関数も与える．最後に，リッジ推定量を定めるリッジパラメータの推定量およびその有効性を比較検討するための評価規準について定義する．

2.1　線形回帰およびリッジ回帰

ここでは，線形回帰モデルとして，

$$\boldsymbol{y} = \mathbf{X}\,\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

を考える．このとき，$\boldsymbol{y}$ は $n\times 1$ の目的変数ベクトル，$\mathbf{X}$ は $n\times p$ のフルランクの説明変数行列，$\boldsymbol{\beta}$ は $p\times 1$ の回帰係数ベクトル，そして$\boldsymbol{\varepsilon}$は $n\times 1$ の誤差ベクトルであり，正規分布 $N(\mathbf{0},\,\sigma^2\mathbf{I}_n)$ に従うものとする．ただし，$\mathbf{I}_n$ は n 次の単位行列を表す．また，$\boldsymbol{\beta}$の最小 2 乗推定量は $\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{y}$ として得られ，誤差分散 σ^2 の不偏推定量は $\hat{\sigma}^2 = \boldsymbol{e}'\boldsymbol{e}/(n-p)$ となる．ただし,「$'$」は行列あるいはベクトルの転置を表し，$\boldsymbol{e}$ は残差ベクトルであり，$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{I}_n - \mathbf{H})\boldsymbol{y}$ である．このとき，$\mathbf{H}$ は説明変数行列 $\mathbf{X}$ から構成されるハット行列 (hat matrix)$\mathbf{H} = \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'$ であり，その第 i 対角成分 h_{ii} がてこ比である．このてこ比については，$1/n \le h_{ii} < 1$ とする．さらに，残

差ベクトル $\boldsymbol{e}$ の第 i 成分 e_i を標準化した $t_i = e_i/(\hat{\sigma}\sqrt{1-h_{ii}})$ を標準化残差 (内的スチューデント化残差) とし，t_i を第 i 成分とする標準化残差ベクトルを $\boldsymbol{t} = [\mathrm{diag}(\mathbf{I}_n - \mathbf{H})]^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{e}/\hat{\sigma}$ とする．ただし，$\mathrm{diag}(\mathbf{A})$ は正方行列 $\mathbf{A}$ の対角成分のみを取り出し，非対角成分をすべて 0 にした行列を表す．

線形回帰の 1 つの代替的方法としてリッジ回帰がある (Hoerl and Kennard[3] や Groβ[2] などを参照)．リッジ回帰における回帰係数ベクトル$\boldsymbol{\beta}$の推定量 (以下，リッジ推定量) を，リッジパラメータ $k(\geq 0)$ を導入することにより，

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}^R \equiv (\mathbf{X}'\mathbf{X} + k\mathbf{I}_p)^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{y}$$

と定義する．すると，最小 2 乗推定量の場合と同じく，残差ベクトル $\boldsymbol{e}^R$ は，$\boldsymbol{e}^R = \boldsymbol{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}^R = (\mathbf{I}_n - \mathbf{H}^R)\boldsymbol{y}$ となる．ただし，リッジ回帰におけるハット行列 $\mathbf{H}^R$ は $\mathbf{H}^R = \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X} + k\mathbf{I}_p)^{-1}\mathbf{X}'$ であり，その第 i 対角成分 h_{ii}^R がリッジ回帰におけるてこ比である．このとき，$0 < h_{ii}^R < 1$ である．

また，第 i 番目の観測値を除去したときの回帰係数ベクトル$\boldsymbol{\beta}$の最小 2 乗推定量は

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{(i)} = (\mathbf{X}'_{(i)}\mathbf{X}_{(i)})^{-1}\mathbf{X}'_{(i)}\boldsymbol{y}_{(i)}$$

と定義される．ただし，添字の $(\cdot)$ は n 個の観測値の中から除去される観測値の番号を表す．通常の最小 2 乗推定量の場合と同様に，第 i 番目の観測値を除去したときのリッジ推定量は

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{(i)}^R = (\mathbf{X}'_{(i)}\mathbf{X}_{(i)} + k\mathbf{I}_p)^{-1}\mathbf{X}'_{(i)}\boldsymbol{y}_{(i)}$$

となる．このとき，観測値除去に関してリッジパラメータ k は一定 (独立) であると仮定するが，k についての挙動を調べる場合は観測値を固定した上である種の変数として扱う．σ^2 の不偏推定量 $\hat{\sigma}^2$ の場合についても，第 i 番目の観測値を除去したときの推定量 $\hat{\sigma}_{(i)}^2$ を

$$\hat{\sigma}_{(i)}^2 = \frac{\boldsymbol{y}'_{(i)}(\mathbf{I}_n - \mathbf{H}_{(i)})\boldsymbol{y}_{(i)}}{n-p-1} = \frac{\boldsymbol{y}'_{(i)}\boldsymbol{y}_{(i)} - \boldsymbol{y}'_{(i)}\mathbf{X}_{(i)}(\mathbf{X}'_{(i)}\mathbf{X}_{(i)})^{-1}\mathbf{X}'_{(i)}\boldsymbol{y}_{(i)}}{n-p-1} = \frac{n-p-t_i^2}{n-p-1}\hat{\sigma}^2$$

と定義する．

特に，$k=0$ とすれば，$\hat{\boldsymbol{\beta}}^R = \hat{\boldsymbol{\beta}}$，$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{(i)}^R = \hat{\boldsymbol{\beta}}_{(i)}$，あるいは $\mathbf{H}^R = \mathbf{H}$ など，リッジ回帰の統計量が通常の線形回帰の統計量と一致することがわかる．

2.2　リッジ推定量に基づく診断統計量

通常の線形回帰における尤度距離 (Cook and Weisberg[1] を参照) をリッジ推定量に基づく診断統計量として拡張したものを定義する．この尤度距離は，代表的な診断統計量である Cook の距離とも関連するのでその定義式も示す．また，リッジ推定量に基づく尤度距離については，リッジパラメータ k に関して偏微分した結果である導関数も与える．

まず，代表的な診断統計量である Cook の距離を定義する．リッジ推定量に基づく Cook の距離 CD_i^R は，Takeuchi[6] によって提案された通常の線形回帰における Cook の距離を拡張することに

より導入され，

$$\mathrm{CD}_i^R \equiv \frac{(\hat{\boldsymbol{\beta}}^R - \hat{\boldsymbol{\beta}}_{(i)}^R)'(\mathbf{X}'\mathbf{X}+k\mathbf{I}_p)(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{X}+k\mathbf{I}_p)(\hat{\boldsymbol{\beta}}^R - \hat{\boldsymbol{\beta}}_{(i)}^R)}{p\hat{\sigma}^2} = \{s_i(c_i+d_i)\}^2 \tag{2.1}$$

と与えられる (Takeuchi[7] を参照)．ただし，c_i は $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{\Pi}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{t}/\sqrt{p}$ の第 i 成分であり，このとき，$\boldsymbol{\Pi} = \mathrm{diag}(\mathbf{H})[\mathrm{diag}(\mathbf{I}_n - \mathbf{H})]^{-1}$ であり，この第 i 対角成分が，$\pi_i = h_{ii}/(1-h_{ii})$ である．同様に，d_i は $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{\Pi}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{u}/\sqrt{p}$ の第 i 成分であり，このとき，$\boldsymbol{u} = [\mathrm{diag}(\mathbf{I}_n - \mathbf{H})]^{-\frac{1}{2}}(\boldsymbol{e}^R - \boldsymbol{e})/\hat{\sigma}$ であり，この第 i 成分が u_i である．最後に，s_i は $\mathbf{S} = \mathrm{diag}(\mathbf{I}_n - \mathbf{H})[\mathrm{diag}(\mathbf{I}_n - \mathbf{H}^R)]^{-1}$ の第 i 対角成分であり，$s_i = (1-h_{ii})/(1-h_{ii}^R)$ である．特に，$k=0$ のとき，竹内 [9] などから

$$\mathrm{CD}_i^R\Big|_{k=0} = \mathrm{CD}_i = c_i^2$$

とする．

(2.1) 式で与えられるリッジ推定量に基づく Cook の距離 CD_i^R においては，$\hat{\boldsymbol{\beta}}^R - \hat{\boldsymbol{\beta}}_{(i)}^R$ の中に挟まれる行列の選び方によっていくつかの定義式が考えられるが，ここでは，$\hat{\boldsymbol{\beta}}^R$ の分散共分散行列 $\mathrm{Var}(\hat{\boldsymbol{\beta}}^R) = \sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X}+k\mathbf{I}_p)^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{X})(\mathbf{X}'\mathbf{X}+k\mathbf{I}_p)^{-1}$ の逆行列を選ぶものとする (たとえば，Walker and Birch[12] を参照)．

つぎに，リッジ推定量に基づく尤度距離 LD_i^R を以下のように定義する (竹内 [8] を参照)．

$$\mathrm{LD}_i^R \equiv 2[L(\hat{\boldsymbol{\beta}}^R) - L(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{(i)}^R)] \tag{2.2}$$

ただし，通常の線形回帰における最小 2 乗推定量の場合と同じく，

$$L(\hat{\boldsymbol{\beta}}^R) : \boldsymbol{\beta}\text{が}\hat{\boldsymbol{\beta}}^R\text{のときの対数尤度} \quad \text{および} \quad L(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{(i)}^R) : \boldsymbol{\beta}\text{が}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{(i)}^R\text{のときの対数尤度}$$

とする．(2.2) 式を (2.1) 式の Cook の距離 CD_i^R を利用して表現すると，

$$\begin{aligned}\mathrm{LD}_i^R = n\log T_i + \frac{1}{T_i}\cdot\frac{n}{n-p}\left[\frac{h_{ii}^{R2}}{h_{ii}}p\mathrm{CD}_i^R + 2s_i(t_i+u_i)u_i^*\right]& \\ +n\left(\frac{1}{T_i}-1\right)\left[1+\frac{\boldsymbol{u}'\mathrm{diag}(\mathbf{I}_n-\mathbf{H})\boldsymbol{u}}{n-p}\right]&\end{aligned} \tag{2.3}$$

となる．ただし，

$$T_i = \frac{n}{n-1}\cdot\frac{n-p-t_i^2}{n-p}$$

であり，h_{ii}^{R2} は $\mathbf{H}^{R2} = (\mathbf{H}^R)^2$ の第 i 対角成分であり，それに u_i^* は $\boldsymbol{u}^* = [\mathrm{diag}(\mathbf{I}_n - \mathbf{H})]^{-\frac{1}{2}}(\boldsymbol{e}^{R2} - \boldsymbol{e}^R)/\hat{\sigma}$ の第 i 成分である．ここで，$\boldsymbol{e}^{R2} = (\mathbf{I}_n - \mathbf{H}^{R2})\boldsymbol{y}$ である．さらに，(2.3) 式は

$$\mathrm{LD}_i^R = n\log T_i + \frac{1}{T_i}\cdot\frac{np}{n-p}\mathrm{CD}_i^{R*} + n\left(\frac{1}{T_i}-1\right)\left[1+\frac{\boldsymbol{u}'\mathrm{diag}(\mathbf{I}_n-\mathbf{H})\boldsymbol{u}}{n-p}\right] \tag{2.4}$$

と表現することもできる．ただし，(2.4) 式において

$$\mathrm{CD}_i^{R*} \equiv \frac{\pi_i^*}{\pi_i}\left[\left\{s_i(c_i+d_i)+\frac{d_i^*}{\pi_i^*}\right\}^2 - \left(\frac{d_i^*}{\pi_i^*}\right)^2\right] \tag{2.5}$$

とする．このとき，(2.5) 式において，d_i^* は $\boldsymbol{d}^* = \boldsymbol{\Pi}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{u}^*/\sqrt{p}$ の第 i 成分であり，また π_i^* は $\boldsymbol{\Pi}^* = \mathrm{diag}\{(\mathbf{H}^R)^2\}[\mathrm{diag}(\mathbf{I}_n - \mathbf{H})]^{-1}$ の第 i 対角成分であり，$\pi_i^* = h_{ii}^{R2}/(1-h_{ii})$ である．特に，$k=0$ のとき，

$$\mathrm{LD}_i^R\Big|_{k=0} = \mathrm{LD}_i = n\log T_i + \frac{1}{T_i}\cdot\frac{np}{n-p}\mathrm{CD}_i + n\left(\frac{1}{T_i}-1\right)$$

である．

最後に，リッジ推定量に基づく尤度距離 LD_i^R のリッジパラメータ k に関する導関数を与える．導関数 DL_i は，竹内 [9] から $k>0$ の領域において

$$\mathrm{DL}_i \equiv \frac{\partial}{\partial k}\mathrm{LD}_i^R = \frac{2}{k}\cdot\frac{n}{n-p}\left[\frac{p}{T_i}\cdot\frac{s_i}{\pi_i}\left\{\left(\frac{1}{s_i s_i^*} - \frac{1}{s_i s_i^{**}} + \pi_i^*(\frac{1}{s_i} - \frac{1}{s_i^*})\right)\mathrm{CD}_i^R\right.\right.$$
$$\left.\left. +(c_i+d_i)\left(s_i(\pi_i^* - \frac{1}{s_i^*})d_i^* + 2d_i^{**}\right) + (d_i^*)^2\right\} + \left(\frac{1}{T_i}-1\right)\boldsymbol{u}'\mathrm{diag}(\mathbf{I}_n-\mathbf{H})\boldsymbol{u}^*\right] \tag{2.6}$$

となる．ただし，s_i^* は $\mathbf{S}^* = \mathrm{diag}(\mathbf{I}_n - \mathbf{H})[\mathrm{diag}(\mathbf{I}_n - \mathbf{H}^{R2})]^{-1}$ の第 i 対角成分であり，$s_i^* = (1-h_{ii})/(1-h_{ii}^{R2})$ である．また，s_i^{**} は $\mathbf{S}^{**} = \mathrm{diag}(\mathbf{I}_n - \mathbf{H})[\mathrm{diag}(\mathbf{I}_n - \mathbf{H}^{R3})]^{-1}$ の第 i 対角成分であり，$s_i^{**} = (1-h_{ii})/(1-h_{ii}^{R3})$ である．このとき，h_{ii}^{R3} は $\mathbf{H}^{R3} = (\mathbf{H}^R)^3$ の第 i 対角成分である．さらに，d_i^{**} は $\boldsymbol{d}^{**} = \boldsymbol{\Pi}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{u}^{**}/\sqrt{p}$ の第 i 成分であり，$\boldsymbol{u}^{**} = [\mathrm{diag}(\mathbf{I}_n - \mathbf{H})]^{-\frac{1}{2}}(\boldsymbol{e}^{R3} - \boldsymbol{e}^{R2})/\hat{\sigma}$ である．ここで，$\boldsymbol{e}^{R3} = (\mathbf{I}_n - \mathbf{H}^{R3})\boldsymbol{y}$ である．

2.3　リッジパラメータの推定量とその評価規準

比較検討をするためのリッジパラメータ k の推定量を 4 つ定義する．リッジ推定量に対してよく利用される代表的なリッジパラメータ k の推定量は以下の 2 つである．1 つは，Hoerl, Kennard and Baldwin[4] によって提案されている $k_1 = p\hat{\sigma}^2/\hat{\boldsymbol{\beta}}'\hat{\boldsymbol{\beta}}$ であり，もう 1 つは Lawless and Wang[5] によって提案されている $k_2 = p\hat{\sigma}^2/\hat{\boldsymbol{\beta}}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}$ である．

これらに加えて，竹内 [10] において k_1 を改良した新たなリッジパラメータの推定量として，以下のような 2 つのものが提案されている．1 つは説明変数行列 $\mathbf{X}$ に基づいた $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ の固有値 ($\mathbf{X}$ の特異値の 2 乗) とその固有ベクトルを利用した推定量として

$$k^* = \delta_{max}\frac{p\hat{\sigma}^2}{\sum_{j=1}^{p} m_j^2} = \delta_{max}\frac{p\hat{\sigma}^2}{\boldsymbol{m}'\boldsymbol{m}} \tag{2.7}$$

と与えられる．ただし，δ_{max} は k^* が $0 < k^* \leq 1$ を満たすものの中で最大の固有値 δ_j であり，$\delta_j(>0)$ の候補は，説明変数行列 $\mathbf{X}$ を

$$\mathbf{X} = \mathbf{L}\mathbf{G}^{\frac{1}{2}}\mathbf{U}'$$

と特異値分解することにより得られる $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ の第 j 固有値であり，$p\times p$ の対角行列 $\mathbf{G}$ の第 j 対角成分である (固有値は大きいものから付番する，つまり $\delta_1 \geq \delta_2 \geq \ldots \geq \delta_p$ とする)．また，その第

j 固有値 δ_j に対応する固有ベクトル $\mathbf{U}_j$ を第 j 列にもつ行列が $\mathbf{U}$ であり，これは $p \times p$ の正方行列になり $\mathbf{U}'\mathbf{U} = \mathbf{U}\mathbf{U}' = \mathbf{I}_p$ を満たす．さらに，$\mathbf{L}$ は $n \times p$ の行列であり $\mathbf{L}'\mathbf{L} = \mathbf{I}_p$ を満たす．加えて，m_j は $\boldsymbol{m} = \mathbf{L}'\boldsymbol{y}$ の第 j 成分を表す (竹内 [10] を参照).

ここで，多重共線性を測る尺度として，説明変数行列 $\mathbf{X}$ に基づいた $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ の条件数を定義しておく．$\mathbf{X}'\mathbf{X}$ の最大固有値 δ_1 と最小固有値 δ_p の比，つまり，

$$\text{条件数} = \frac{\text{最大固有値}\delta_1}{\text{最小固有値}\delta_p}$$

として条件数を定義する．通常は，$\mathbf{X}$ の特異値の比である $\sqrt{\delta_1/\delta_p}$ を条件数に用いるが，本論文では上記の固有値の比に着目して検討をする．条件数の値が大きくなると多重共線性が高いと判断され，説明変数行列の構造としては不安定であるとみなされる．よって，条件数の値が大きくなると通常の線形回帰よりもリッジ回帰を適用することが望ましいデータ構造であるともいえる．

(2.7) 式を算出する場合に注意すべき点は，竹内 [10] でも述べてあるとおり，通常のリッジパラメータの推定量においては，変数の個数 p から定数項分を除き，かつ $\hat{\beta}$ からも定数項を除くことにより推定値を求めるが，k^* においては，定数項の分離が容易ではないので，定数項も含めていることである．

もう一方の推定量は，k_1 を単純に拡張したものとして，第 i 番目の観測値を除去したときの $k_{1(i)}$ の平均から

$$k^{**} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} k_{1(i)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{p\hat{\sigma}^2_{(i)}}{\hat{\beta}'_{(i)}\hat{\beta}_{(i)}} \tag{2.8}$$

と与えられる．(2.8) 式についても (2.7) 式と同じく定数項を含めて算出する．

最後に，(2.3) 式や (2.4) 式で定義したリッジ推定量に基づく尤度距離 LD_i^R において，最適な k の値を選定するための評価規準として，竹内 [10] で示されている LD_i^R の平均

$$\mathrm{LD}^R(k) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{LD}_i^R \tag{2.9}$$

を利用する．LD_i^R の値は大きいと影響力が大きいと判断され，逆に小さいと影響力は小さいと判断されるので，(2.9) 式の $\mathrm{LD}^R(k)$ の値をできるだけ小さくする k を最適な $k(= k_{opt})$ とみなす．また，(2.6) 式で定義した LD_i^R の導関数 DL_i の挙動についても，(2.9) 式の $\mathrm{LD}^R(k)$ と同様の規準として

$$\mathrm{DL}^R(k) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{DL}_i \tag{2.10}$$

を算出する．$\mathrm{DL}^R(k)$ の値は，LD_i^R を k について偏微分したものを規準としているので，その絶対値 $|\mathrm{DL}^R(k)|$ が 0 に近いほど，最適な k に近い推定量と判断される．

しかしながら，本論文においては，データ数 n がすべて等しいことと，計算結果の数値表記における精度を形式的に上げるために，平均ではなく合計を評価規準とする．つまり，(2.9) 式およ

び (2.10) 式の代わりに，

$$\mathrm{TLD}^R(k) = n\mathrm{LD}^R(k) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{LD}_i^R$$

および

$$\mathrm{TDL}^R(k) = n\mathrm{DL}^R(k) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{DL}_i$$

をそれぞれ利用する．数値の見方は (2.9) 式および (2.10) 式と基本的にはそれぞれ同じである．

3　データ構造の設定

リッジパラメータ k の推定量を比較検討するために，いくつかのデータ構造を与える．本論文では，Thiart, Dunne, Troskie and Chalton[11] で提案されている方法を利用して，説明変数行列 $\mathbf{X}$ に基づいた $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ の条件数および誤差ベクトル $\boldsymbol{\varepsilon}$の誤差分散 σ^2(以下では，標準偏差 σ) の異なるデータ構造を構築する．彼らの数値実験と同じくデータ数 $n = 30$ および説明変数の数 $p = 5$(定数項を除く) として，説明変数行列 $\mathbf{X}$ および目的変数ベクトル$\boldsymbol{y}$を正規乱数から生成する．

表 3.1　条件数の設定と分布状況

	条件数				
	I	II	III	IV	V
実験 No.	$\alpha_1 = 0.99$ $\alpha_2 = 0.99$	$\alpha_1 = 0.99$ $\alpha_2 = 0.10$	$\alpha_1 = 0.90$ $\alpha_2 = 0.90$	$\alpha_1 = 0.90$ $\alpha_2 = 0.10$	$\alpha_1 = 0.70$ $\alpha_2 = 0.30$
1	1442.59	430.59	146.49	50.29	22.96
2	1063.84	533.37	275.52	72.65	29.29
3	945.80	696.44	180.65	41.20	26.47
4	2461.64	524.57	120.59	36.12	17.00
5	922.29	601.32	106.08	44.75	24.22
6	2035.62	198.10	120.56	94.20	17.10
7	1229.24	372.00	94.19	58.43	17.70
8	1068.84	319.44	131.31	67.97	23.72
9	951.01	672.36	155.48	46.92	19.12
10	820.47	321.58	84.30	44.32	24.40
平均	1294.13	466.98	141.52	55.69	22.20

表 3.2　誤差ベクトルの標準偏差 σ の設定

標準偏差	1	2	3
σ	5.00	1.00	0.01

Thiart, Dunne, Troskie and Chalton[11] は，説明変数行列 $\mathbf{X}$ の第 j 列 $\mathbf{X}_j$ について，$j = 1, 2, 3$ では，

$$\mathbf{X}_j = \sqrt{1-\alpha_1^2}\,\mathbf{Z}_j + \alpha_1 \mathbf{Z}_6 \tag{3.1}$$

$j=4,5$ では，

$$\mathbf{X}_j=\sqrt{1-\alpha_2^2}\,\mathbf{Z}_j+\alpha_2\mathbf{Z}_6 \tag{3.2}$$

として生成している．ただし，ベクトル $\mathbf{Z}_j(j=1,2,3,4,5,6)$ の各成分 Z_{ij} はそれぞれ独立に標準正規分布 $N(0,1)$ から得られる正規乱数であり，α_1 および α_2 は多重共線性の構造を作り出す共線性 (collinearity) パラメータである．また，目的変数ベクトル$\boldsymbol{y}$は，

$$\boldsymbol{y}=\beta_0\mathbf{1}+\beta_1\mathbf{X}_1+\beta_2\mathbf{X}_2+\beta_3\mathbf{X}_3+\beta_4\mathbf{X}_4+\beta_5\mathbf{X}_5+\ \boldsymbol{\varepsilon}$$

として生成している．ただし，$\mathbf{1}$ は成分がすべて 1 の $n\times 1$ のベクトルである．本論文では，一般性を失うことなく $\beta_0=0$ とする．誤差ベクトル $\boldsymbol{\varepsilon}$の標準偏差 σ についてはデータが定まっていないので事前に数値を与え，回帰係数ベクトル $\boldsymbol{\beta}=(\beta_1\ \beta_2\ \beta_3\ \beta_4\ \beta_5)'$ については (3.1) 式および (3.2) 式から生成した $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ の最大固有値 δ_1 に対する固有ベクトル $\mathbf{U}_1$ を代入する．彼らの研究においては，最小固有値 δ_p に対する固有ベクトル $\mathbf{U}_p$ を代入するケースについても取り上げているため数値計算はしたが，計算結果は最大固有値に基づくものと大きな差がなかったため割愛した．

具体的には，共線性パラメータ α_1 および α_2 としては表 3.1 を，誤差ベクトル $\boldsymbol{\varepsilon}$の標準偏差 σ としては表 3.2 のようなケースについてデータを構成する．これらのケースは Thiart, Dunne, Troskie and Chalton[11] が取り上げた設定を基本として，説明変数行列 $\mathbf{X}$ に基づいた $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ の条件数の範囲を拡張するために，一部のパラメータの数値を調整している．彼らの論文では，条件数が約 10 から 500 程度までを設定しているが，本論文では，約 20 から 1300 程度まで範囲を広げ，荒削りではあるが検討の幅を広げるように変更した．

データ構造が正規乱数を合成したものから構築されるため，説明変数行列 $\mathbf{X}$ に基づいた $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ の条件数についてはその分布状況 (バラツキ具合) を確認しておく必要がある．ここでは，5 つの条件数の設定について，それぞれ 10 回ずつの繰返し実験を行い，それぞれの条件数の平均に近いデータを利用することとした．表 3.1 から，条件数 I については実験 No.7 を，条件数 II については実験 No.1 を，条件数 III については実験 No.1 を，条件数 IV については実験 No.7 を，そして条件数 V については実験 No.1 を，それぞれの説明変数行列 $\mathbf{X}$ として利用する．また，誤差ベクトル $\boldsymbol{\varepsilon}$の標準偏差 σ については，彼らの数値実験と同じく，バラツキの極端に大きいケースである標準偏差 1 として $\sigma=5.00$ を，標準的なケースである標準偏差 2 として $\sigma=1.00$ を，そして極端に小さいケースである標準偏差 3 として $\sigma=0.01$ を適用する (表 3.2 を参照)．

今後は，「条件数 I」と「標準偏差 1」を組合せたケースを「I–1」と表記する．その他のケースの組合せについても同様である．表 3.1 および表 3.2 を組合せた 15 とおりのケースに対してデータ構造を想定し，リッジパラメータ k の推定量の有効性について比較検討を行う．

なお，竹内 [10] の数値例においては，Takeuchi[7] が例示した「Artificial Data」(データ数は $n=20$ であり，説明変数の数は定数項を含め $p=4+1=5$) を利用しているが，このデータについて説明変数行列 $\mathbf{X}$ に基づいた $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ の条件数は 23.0 であり，誤差ベクトル $\boldsymbol{\varepsilon}$の標準偏差 σ は 9 という設定である．よって，データ構造としては，V–1 に近いケースといえる．

表 4.1　リッジパラメータ k の推定値

条件数	標準偏差	リッジパラメータ k の推定値 k_1	k^*	k^{**}	k_2	k_{opt}
I	1	0.12694	0.01856	0.01836	0.52805	0.40888
	2	0.08203	0.26511	0.26437	0.04488	0.13376
	3	1.39517×10^{-5}	1.01950×10^{-4}	1.02259×10^{-4}	2.84360×10^{-6}	1.29407×10^{-3}
II	1	0.34832	0.72077	0.71459	0.58597	0.50915
	2	0.00890	0.22279	0.22237	0.06051	0.14884
	3	1.88712×10^{-5}	2.22823×10^{-4}	2.22906×10^{-4}	6.24056×10^{-6}	8.25732×10^{-4}
III	1	0.03092	0.16101	0.16086	0.47839	3.06636
	2	0.17359	0.25400	0.25412	0.04951	0.19327
	3	1.84120×10^{-5}	1.59422×10^{-4}	1.59478×10^{-4}	4.42941×10^{-6}	8.53790×10^{-4}
IV	1	0.19102	0.89963	0.89408	0.25686	0.49914
	2	0.08450	0.26378	0.26322	0.07539	0.18421
	3	1.71659×10^{-5}	2.16886×10^{-4}	2.17572×10^{-4}	6.02466×10^{-6}	9.59178×10^{-5}
V	1	0.68478	0.80499	0.79832	0.68330	1.14665
	2	0.14170	0.18792	0.18714	0.05701	0.21460
	3	7.85102×10^{-6}	1.11555×10^{-4}	1.11794×10^{-4}	3.29284×10^{-6}	1.02888×10^{-4}

注: III–1 については，$0 < k \leq 1$ の範囲において $k = k_{opt} = 0.00568$ のとき，$\mathrm{TLD}^R(k)$ が極小値となるが，最小値ではないので除外した．

表 4.2　k^* で用いた固有値 δ_{max}

標準偏差	条件数 I	II	III	IV	V
1	$\delta_3 = 0.030$	$\delta_3 = 1.037$	$\delta_3 = 0.283$	$\delta_2 = 2.930$	$\delta_3 = 1.014$
2	$\delta_2 = 4.931$	$\delta_2 = 3.069$	$\delta_2 = 4.276$	$\delta_2 = 2.930$	$\delta_2 = 2.931$
3	$\delta_1 = 30.000$	$\delta_1 = 30.000$	$\delta_1 = 30.000$	$\delta_1 = 30.000$	$\delta_1 = 30.000$

4　数値実験

第 2 節で定義したリッジパラメータ k の 4 つの推定量について比較検討をするために，第 3 節で生成したデータ構造である 15 とおりの組合せのケースに対し数値実験を行った．その結果をまとめたものが，表 4.1，表 4.2，表 4.3 それに表 4.4 である．表 4.1 は，すべてのケースのリッジパラメータ k の推定値をまとめたものである．また，表 4.1 の k^* を算出するときに用いた固有値 δ_{max} は表 4.2 のように選ばれている．表 4.3 が，尤度距離 LD_i^R を評価規準としたときの，導関数 DL_i の計算結果の合計 $\mathrm{TDL}^R(k)$ である．この表における数値の絶対値の大きさが最適解 (k_{opt} のときの値) である「0.000」に近ければ，あるいは各ケースにおける 4 つの推定値の中で相対的に小さければ，リッジパラメータ k の推定量として有効性があると判断できる．最後の表 4.4 が尤度距離 LD_i^R の計算結果の合計 $\mathrm{TLD}^R(k)$ である．これは全データ ($n = 30$ 個) の合計であるので，本来の目的である観測値の影響力評価 (LD_i^R による個々の観測値の影響力評価) はできないが，リッジパラメータ k の 4 つの推定量に関して，それぞれの有効性を調べるために便宜上利用する．この値についても最適解 ($k = k_{opt}$ のときの $\mathrm{TLD}^R(k)$ の値) に近ければ有効性が高いといえる．なお，表 4.1，表 4.3 それに表 4.4 において，理論上の最適解となる $k = k_{opt}$ の値については，通常

では $0 < k \leq 1$ の領域において探索するが，数値実験においてはこの領域外に存在することもあり得るために，$k > 1$ の領域まで拡張し一般化しているケース (III–1 および V–1 の 2 つのケース) がある．

加えて，付録において，5 つの条件数それぞれの「標準偏差 1」の場合について，表 4.3 および表 4.4 の算出根拠となった観測値別の計算結果を参考までに示してある．

表 4.3　$\mathrm{TDL}^R(k)$ の計算結果

条件数	標準偏差	$\mathrm{TDL}^R(k)$				
		$k=k_1$	$k=k^*$	$k=k^{**}$	$k=k_2$	$k=k_{opt}$
I	1	-2.929	-81.972	-83.332	0.274	0.000
	2	-5.187	4.887	4.868	-20.063	0.000
	3	-1539.374	-1397.036	-1396.550	-1557.951	0.000
II	1	-0.835	0.482	0.473	0.228	0.000
	2	44.284	5.886	5.859	-13.519	0.000
	3	-1044.498	-756.806	-756.694	-1063.011	0.000
III	1	4.818	-9.898	-9.908	-2.380	0.000
	2	-1.594	3.607	3.613	-32.169	0.000
	3	-952.859	-788.534	-788.469	-969.235	0.000
IV	1	-9.161	2.016	2.009	-5.754	0.000
	2	-6.759	3.699	3.677	-7.682	0.000
	3	-118.811	181.508	182.534	-135.661	0.000
V	1	-0.940	-0.548	-0.566	-0.946	0.000
	2	-12.757	-3.853	-3.979	-44.123	0.000
	3	-396.584	36.114	37.110	-415.632	0.000

まず，表 4.3 から，最適解 ($k = k_{opt}$) に近いリッジパラメータ k の推定量のケースを調べると，k_1 が有効なケースは III–2 および IV–3 であり，k^* が有効なケースは V の 3 つの場合すべてであり，k^{**} が有効なケースは I–2 と 3，II–2 と 3，III–3，IV–1 と 2 であり，k_2 が有効なケースは I–1，II–1，III–1 である．竹内 [10] が提案した k^* および k^{**} の推定値がかなり近い数値であることを考慮すると，比較検討した 15 ケースのうち 10 ケースにおいて提案された推定量の有効性 (最適解に近いこと) が示されたといえる．有効性が示されなかった残りの 5 つのケースのうち，k_2 が有効な 3 つのケースは条件数が 150 程度を超え，なおかつ標準偏差が一番大きい極端なデータ構造をしている場合である．このような場合には，リッジパラメータの推定量として k^* および k^{**} を適用するにはあまり好ましくないことがわかった．他の 2 つのケースについては，表 4.4 と合せて検討をする．

つぎに，表 4.4 の $\mathrm{TLD}^R(k)$ の計算結果を加えて検討する．この表から考えると，k^* および k^{**} の有効性が示されなかった 5 つのケースのうち，II–1 については 4 つの推定量ともに大差がないと判断できる．I–1 については k^* や k^{**} は他の 2 つに劣るが，III–1 については k_2 には劣るが k_1 より有効であるといえる．また，III–2 および IV–3 についても，k_1 と比較して k^* および k^{**} は大

表 4.4　$\mathrm{TLD}^R(k)$ の計算結果

条件数	標準偏差	$\mathrm{TLD}^R(k)$					
		$k=0$	$k=k_1$	$k=k^*$	$k=k^{**}$	$k=k_2$	$k=k_{opt}$
I	1	13.510	5.136	6.771	6.787	4.917	4.900
	2	17.647	7.080	7.334	7.330	7.475	6.969
	3	11.975	11.953	11.824	11.824	11.970	11.067
II	1	12.958	6.644	6.644	6.641	6.594	6.585
	2	14.102	14.436	13.431	13.428	13.704	13.197
	3	20.834	20.814	20.631	20.631	20.827	20.408
III	1	12.744	12.920	11.449	11.451	9.907	8.890
	2	13.582	8.246	8.348	8.348	9.696	8.230
	3	24.670	24.652	24.529	24.529	24.665	24.257
IV	1	21.420	16.468	15.969	15.957	15.984	15.430
	2	11.471	9.326	9.172	9.170	9.392	9.018
	3	10.417	10.415	10.421	10.421	10.416	10.410
V	1	12.802	7.556	7.468	7.472	7.557	7.391
	2	18.158	12.143	11.772	11.775	14.348	11.722
	3	10.551	10.548	10.529	10.529	10.550	10.529

注: 表 4.1 の注と同じく，III–1 については，$0 < k \leq 1$ の範囲において $k = k_{opt} = 0.00568$ のとき，$\mathrm{TLD}^R(k)$ が極小値となるが，そのときの値は 12.510 であり，$k = k^*$，$k = k^{**}$ それに $k = k_2$ の $\mathrm{TLD}^R(k)$ よりも大きな値となるので除外した．

差がないと判断できる．確かに変化率である $\mathrm{TDL}^R(k)$ から考えると有効性に差があるように見えるが，本来の影響力の評価規準である $\mathrm{TLD}^R(k)$ の数値を見ると大差がないとわかる．

以上から，竹内 [10] が提案した推定量 k^* および k^{**} は，説明変数行列 $\mathbf{X}$ に基づいた $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ の条件数が 150 程度を超え，なおかつ誤差ベクトル $\boldsymbol{\varepsilon}$の標準偏差 σ が大きい極端なデータ構造をしている場合を除き，従来の推定量である k_1 および k_2 よりも有効あるいは同等であることが検証された．したがって，実データの影響力評価においても，事前に説明変数行列 $\mathbf{X}$ に基づいた $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ の条件数を算出し，誤差ベクトル $\boldsymbol{\varepsilon}$の標準偏差 σ の推定値を求めておけば，k^* や k^{**} をリッジパラメータ k の推定量として適用することが有効であるか否かを確認することができる．

5　まとめと今後の課題

本論文では，リッジ推定量に基づく尤度距離 LD_i^R を影響力の評価規準とした $\mathrm{TLD}^R(k)$ および $\mathrm{TDL}^R(k)$ を利用して，リッジパラメータ k の推定量について，その有効性を数値実験により比較検討した．その結果，説明変数行列に基づく条件数の値に関わらず，誤差分散が極端に大きくなければ，竹内 [10] が提案した推定量 k^* および k^{**} は，従来の代表的な推定量 k_1 および k_2 に比べておおむね有効であることが示された．しかしながら，説明変数行列に基づく条件数の値が 150 程度を超え，誤差ベクトルの誤差分散 (標準偏差) が極端に大きい場合には，あまり有効ではないこ

とも判明したが，条件数が本論文で確認した範囲の最大値である 1300 程度以下であれば，従来の代表的な推定量とほぼ同等の有効性があることもわかった．

今後の課題として，k^* や k^{**} の有効性が示されたデータ構造に対してリッジパラメータ k を推定量として適用したときに，観測値の影響力評価を詳細に検討する作業が残されている．本論文においては，リッジパラメータの推定量を選定することに重点を置いたために，個別の観測値ではなくデータ全体の評価を利用した検討にとどまっている．本来の影響力評価においては個々の観測値の影響力を綿密に調べる必要がある．この結果を基に，再度，リッジパラメータの推定量の有効性や妥当性を検討したい．

付録:　観測値別の計算結果

付録として，5 つの条件数それぞれについて「標準偏差 1」のケースのみ観測値別の詳細な計算結果を提示する．ただし，すべての表において，小数第四位を四捨五入したものを表記したため，個別の観測値の計算結果を合計したものと一番下の合計欄の数値が一致しない場合がある．また，$\mathrm{TDL}^R(k = k_{opt})$ はすべて「0.000」と表記されているが，負の数値の場合も便宜上正の数値として表記した．

表 A.1　$\mathrm{TDL}^R(k)$ の計算結果 (I–1 の場合)

	DL_i				
	$k = k_1$	$k = k^*$	$k = k^{**}$	$k = k_2$	$k = k_{opt}$
No.	$= 0.127$	$= 0.019$	$= 0.018$	$= 0.528$	$= 0.409$
1	-0.059	-0.252	-0.251	-0.010	-0.011
2	-0.434	-0.543	-0.541	-0.208	-0.252
3	-1.477	-29.658	-30.012	0.546	0.472
4	0.016	-0.144	-0.145	0.032	0.035
5	-0.010	-0.621	-0.634	-0.015	-0.014
6	-0.208	0.075	0.086	0.016	0.004
7	-0.321	-4.014	-4.046	0.165	0.146
8	0.357	-2.510	-2.565	0.140	0.161
9	-0.070	-0.212	-0.219	0.016	0.002
10	0.103	-0.485	-0.490	0.171	0.167
11	-0.329	-0.145	-0.133	-0.128	-0.151
12	0.555	-7.453	-7.620	0.135	0.170
13	0.465	-4.309	-4.420	0.178	0.205
14	0.933	-9.531	-9.800	0.208	0.259
15	-0.217	-0.503	-0.502	-0.085	-0.101
16	-0.088	-0.014	-0.011	-0.022	-0.026
17	0.051	-2.041	-2.088	-0.023	-0.020
18	-0.177	-1.015	-1.026	-0.121	-0.135
19	-0.095	-2.100	-2.145	-0.153	-0.165
20	0.131	-0.994	-1.032	0.097	0.103
21	0.139	-2.880	-2.930	0.149	0.159
22	-0.165	0.198	0.223	0.233	0.221
23	-0.327	-4.787	-4.891	-0.236	-0.265
24	-0.128	-0.158	-0.155	-0.050	-0.059
25	-0.156	-0.020	-0.014	-0.049	-0.058
26	-0.153	-2.011	-2.032	-0.007	-0.012
27	-0.040	-0.399	-0.402	0.021	0.020
28	-1.422	-0.875	-0.839	-0.633	-0.750
29	0.010	-0.158	-0.159	0.087	0.079
30	0.189	-4.413	-4.539	-0.182	-0.185
$\mathrm{TDL}^R(k)$	-2.929	-81.972	-83.332	0.274	0.000

表 A.2 TLD$^R(k)$ の計算結果 (I–1 の場合)

	LD_i^R					
	$k=0$	$k=k_1$	$k=k^*$	$k=k^{**}$	$k=k_2$	$k=k_{opt}$
No.	(LD_i)	$=0.127$	$=0.019$	$=0.018$	$=0.528$	$=0.409$
1	0.017	-0.002	0.014	0.014	-0.009	-0.008
2	0.087	0.037	0.094	0.094	-0.082	-0.055
3	5.035	2.579	3.367	3.373	2.636	2.574
4	0.046	0.013	0.017	0.017	0.026	0.022
5	0.029	-0.014	-0.006	-0.006	-0.019	-0.017
6	0.096	0.066	0.103	0.103	0.052	0.050
7	0.894	0.453	0.594	0.595	0.479	0.460
8	0.313	0.169	0.156	0.157	0.250	0.232
9	0.022	-0.004	0.005	0.005	-0.011	-0.012
10	0.033	0.025	0.029	0.029	0.087	0.067
11	0.049	0.037	0.085	0.085	-0.039	-0.022
12	0.501	-0.004	0.007	0.008	0.096	0.078
13	0.421	0.038	0.022	0.023	0.142	0.119
14	1.379	0.224	0.177	0.179	0.381	0.354
15	0.030	0.002	0.039	0.040	-0.049	-0.038
16	0.017	0.005	0.018	0.018	-0.010	-0.007
17	0.473	-0.019	-0.004	-0.004	-0.021	-0.018
18	0.067	0.001	0.034	0.035	-0.058	-0.043
19	0.305	0.123	0.148	0.149	0.060	0.079
20	0.568	0.125	0.116	0.116	0.169	0.157
21	0.279	0.073	0.107	0.107	0.138	0.120
22	0.386	0.279	0.331	0.331	0.340	0.313
23	0.751	0.117	0.201	0.202	0.003	0.033
24	0.031	-0.005	0.015	0.015	-0.035	-0.028
25	0.024	0.009	0.032	0.032	-0.022	-0.016
26	0.156	0.028	0.089	0.089	0.014	0.015
27	0.036	0.017	0.033	0.033	0.021	0.018
28	0.501	0.394	0.586	0.586	0.032	0.114
29	0.017	0.007	0.013	0.013	0.033	0.023
30	0.947	0.362	0.349	0.350	0.313	0.335
$\mathrm{TLD}^R(k)$	13.510	5.136	6.771	6.787	4.917	4.900

表 B.1　$\mathrm{TDL}^R(k)$ の計算結果 (II–1 の場合)

	DL_i				
	$k=k_1$	$k=k^*$	$k=k^{**}$	$k=k_2$	$k=k_{opt}$
No.	$=0.348$	$=0.721$	$=0.715$	$=0.586$	$=0.509$
1	-0.096	-0.045	-0.046	-0.056	-0.065
2	-0.031	-0.028	-0.028	-0.028	-0.029
3	-0.125	0.158	0.156	0.101	0.051
4	-0.592	-0.422	-0.425	-0.493	-0.531
5	-0.019	-0.239	-0.238	-0.204	-0.166
6	0.052	0.038	0.038	0.043	0.045
7	-0.340	-0.096	-0.098	-0.151	-0.195
8	-0.124	-0.024	-0.025	-0.047	-0.065
9	0.631	0.570	0.572	0.605	0.620
10	-0.243	-0.116	-0.117	-0.149	-0.173
11	0.010	0.001	0.001	0.004	0.006
12	0.129	0.001	0.002	0.029	0.052
13	-0.060	-0.044	-0.044	-0.048	-0.051
14	0.407	0.468	0.469	0.480	0.475
15	0.023	-0.021	-0.021	-0.010	-0.001
16	-0.173	-0.133	-0.134	-0.148	-0.157
17	-1.051	-0.237	-0.244	-0.421	-0.568
18	0.117	0.034	0.035	0.055	0.071
19	-0.104	-0.016	-0.016	-0.035	-0.051
20	0.224	0.230	0.230	0.242	0.245
21	0.250	0.144	0.145	0.175	0.196
22	-0.463	-0.138	-0.141	-0.216	-0.277
23	-0.041	-0.029	-0.029	-0.032	-0.034
24	0.306	0.252	0.253	0.273	0.284
25	0.007	-0.021	-0.020	-0.015	-0.010
26	0.129	0.038	0.039	0.060	0.077
27	0.422	0.144	0.147	0.222	0.278
28	-0.017	-0.031	-0.031	-0.027	-0.024
29	0.129	0.113	0.114	0.121	0.124
30	-0.194	-0.068	-0.070	-0.101	-0.126
$\mathrm{TDL}^R(k)$	-0.835	0.482	0.473	0.228	0.000

表 B.2 $\mathrm{TLD}^R(k)$ の計算結果 (II–1 の場合)

	LD_i^R					
	$k=0$	$k=k_1$	$k=k^*$	$k=k^{**}$	$k=k_2$	$k=k_{opt}$
No.	(LD_i)	$=0.348$	$=0.721$	$=0.715$	$=0.586$	$=0.509$
1	0.037	-0.034	-0.058	-0.058	-0.051	-0.047
2	0.019	0.006	-0.005	-0.005	-0.001	0.001
3	1.859	0.844	0.864	0.863	0.846	0.840
4	2.267	0.963	0.771	0.774	0.833	0.872
5	1.141	1.019	0.958	0.960	0.988	1.003
6	0.020	0.039	0.056	0.056	0.051	0.047
7	0.439	-0.088	-0.160	-0.159	-0.143	-0.130
8	0.276	-0.066	-0.090	-0.090	-0.085	-0.081
9	1.398	1.199	1.426	1.423	1.347	1.300
10	0.649	0.242	0.179	0.180	0.197	0.209
11	0.022	0.023	0.025	0.025	0.024	0.024
12	0.105	0.185	0.204	0.204	0.202	0.199
13	0.029	-0.014	-0.033	-0.032	-0.026	-0.023
14	1.162	1.197	1.371	1.368	1.306	1.270
15	0.021	0.040	0.039	0.040	0.042	0.042
16	0.225	0.040	-0.018	-0.017	0.001	0.013
17	0.904	0.008	-0.199	-0.198	-0.156	-0.118
18	0.065	0.115	0.140	0.140	0.134	0.129
19	1.134	-0.039	-0.058	-0.057	-0.054	-0.051
20	0.020	0.041	0.130	0.129	0.098	0.080
21	0.110	0.221	0.293	0.292	0.271	0.257
22	0.227	-0.124	-0.225	-0.224	-0.201	-0.182
23	0.051	0.028	0.016	0.016	0.020	0.022
24	0.359	0.307	0.411	0.410	0.376	0.355
25	0.054	0.037	0.034	0.034	0.036	0.037
26	0.207	0.207	0.235	0.235	0.228	0.223
27	0.025	0.203	0.303	0.302	0.278	0.259
28	0.018	0.011	0.002	0.002	0.006	0.008
29	0.053	0.084	0.130	0.129	0.114	0.105
30	0.060	-0.052	-0.098	-0.097	-0.086	-0.078
$\mathrm{TLD}^R(k)$	12.958	6.644	6.644	6.641	6.594	6.585

表 C.1　$\mathrm{TDL}^R(k)$ の計算結果 (III–1 の場合)

	DL_i				
	$k=k_1$	$k=k^*$	$k=k^{**}$	$k=k_2$	$k=k_{opt}$
No.	$=0.031$	$=0.161$	$=0.161$	$=0.478$	$=3.066$
1	4.660	0.656	0.658	0.007	0.000
2	2.996	-0.182	-0.181	-0.436	-0.047
3	3.544	0.232	0.234	-0.253	-0.035
4	-1.752	0.858	0.859	0.168	0.013
5	-1.120	-0.185	-0.186	-0.121	-0.015
6	-2.924	-1.102	-1.104	-0.041	-0.006
7	-4.595	2.091	2.093	0.712	0.048
8	-1.781	-1.028	-1.029	-0.015	0.012
9	-1.203	-0.409	-0.410	-0.190	-0.016
10	0.952	-1.529	-1.531	-0.374	-0.013
11	0.398	0.196	0.197	-0.022	-0.004
12	1.235	-1.344	-1.346	-0.282	-0.016
13	3.009	-1.022	-1.024	0.266	0.046
14	1.843	-0.808	-0.809	-0.324	-0.022
15	9.314	2.477	2.481	0.302	0.003
16	1.395	0.907	0.909	0.108	0.005
17	-1.550	-0.471	-0.471	-0.186	-0.015
18	0.516	-0.345	-0.345	-0.243	-0.025
19	-0.365	-0.188	-0.188	-0.182	-0.018
20	3.940	0.988	0.990	0.085	0.008
21	0.664	0.319	0.319	-0.019	-0.003
22	-3.296	-0.383	-0.384	-0.023	-0.001
23	0.568	1.014	1.015	0.198	0.012
24	-1.564	-0.429	-0.430	-0.061	0.016
25	0.647	-2.156	-2.158	-0.289	-0.005
26	-1.488	-0.615	-0.616	-0.191	0.008
27	-3.351	0.315	0.315	0.018	-0.006
28	-7.362	-7.875	-7.884	-0.994	0.073
29	2.049	0.591	0.592	0.140	0.008
30	-0.563	-0.471	-0.471	-0.138	-0.007
$\mathrm{TDL}^R(k)$	4.818	-9.898	-9.908	-2.380	0.000

表 C.2 $\mathrm{TLD}^R(k)$ の計算結果 (III–1 の場合)

No.	LD_i^R					
	$k=0$ (LD_i)	$k=k_1$ $=0.031$	$k=k^*$ $=0.161$	$k=k^{**}$ $=0.161$	$k=k_2$ $=0.478$	$k=k_{opt}$ $=3.066$
1	0.336	0.575	0.809	0.809	0.868	0.832
2	0.035	0.213	0.304	0.304	0.168	-0.226
3	0.045	0.034	0.207	0.207	0.156	-0.093
4	0.765	0.173	0.312	0.311	0.433	0.521
5	0.029	-0.074	-0.121	-0.121	-0.168	-0.279
6	0.062	0.134	-0.187	-0.187	-0.282	-0.298
7	0.856	-0.044	0.165	0.165	0.560	0.983
8	0.074	0.214	-0.054	-0.054	-0.146	-0.061
9	0.030	-0.003	-0.090	-0.090	-0.175	-0.327
10	0.046	0.254	0.036	0.036	-0.206	-0.402
11	0.092	-0.119	-0.051	-0.051	-0.042	-0.058
12	0.384	0.903	0.653	0.653	0.468	0.261
13	1.541	2.478	2.221	2.221	2.213	2.543
14	0.022	0.086	0.034	0.034	-0.132	-0.343
15	0.891	1.018	1.707	1.707	1.999	2.127
16	0.237	-0.128	0.101	0.101	0.208	0.238
17	0.036	0.000	-0.110	-0.110	-0.199	-0.344
18	0.051	0.145	0.114	0.114	0.020	-0.193
19	0.037	-0.065	-0.078	-0.078	-0.145	-0.294
20	0.306	0.275	0.579	0.578	0.681	0.726
21	0.175	0.009	0.111	0.111	0.129	0.114
22	0.064	-0.020	-0.195	-0.195	-0.227	-0.238
23	0.245	-0.205	0.012	0.012	0.155	0.250
24	0.019	-0.023	-0.131	-0.131	-0.190	-0.136
25	0.148	0.679	0.269	0.269	0.001	-0.089
26	0.023	-0.013	-0.136	-0.136	-0.246	-0.309
27	0.211	-0.114	-0.141	-0.141	-0.102	-0.127
28	5.760	6.368	4.864	4.866	3.860	3.814
29	0.188	0.223	0.378	0.378	0.463	0.584
30	0.032	-0.054	-0.131	-0.131	-0.212	-0.288
$\mathrm{TLD}^R(k)$	12.744	12.920	11.449	11.451	9.907	8.890

表 D.1　$\mathrm{TDL}^R(k)$ の計算結果 (IV–1 の場合)

	DL_i				
	$k = k_1$	$k = k^*$	$k = k^{**}$	$k = k_2$	$k = k_{opt}$
No.	$= 0.191$	$= 0.900$	$= 0.894$	$= 0.257$	$= 0.499$
1	-0.408	-0.068	-0.069	-0.296	-0.132
2	0.964	0.343	0.346	0.864	0.611
3	-0.173	-0.023	-0.024	-0.128	-0.048
4	2.688	0.982	0.990	2.455	1.732
5	-0.263	-0.095	-0.095	-0.199	-0.119
6	-5.915	-0.056	-0.068	-4.614	-1.707
7	0.138	0.062	0.063	0.138	0.102
8	0.587	0.202	0.203	0.542	0.379
9	0.214	-0.037	-0.037	0.135	0.003
10	-1.054	-0.139	-0.141	-0.915	-0.425
11	-0.023	0.037	0.038	0.017	0.061
12	-3.200	-0.528	-0.536	-2.425	-1.322
13	-0.219	0.016	0.016	-0.146	0.005
14	0.324	0.228	0.228	0.335	0.290
15	0.458	0.237	0.238	0.385	0.314
16	-0.736	0.050	0.049	-0.596	-0.189
17	1.220	0.435	0.438	1.086	0.756
18	0.136	-0.134	-0.134	0.082	-0.055
19	-0.627	-0.099	-0.101	-0.603	-0.350
20	0.200	-0.026	-0.025	0.189	0.089
21	-0.629	0.286	0.284	-0.421	0.038
22	-0.183	0.134	0.133	-0.016	0.097
23	-0.305	-0.210	-0.211	-0.319	-0.286
24	-0.380	0.091	0.091	-0.224	0.026
25	-0.113	-0.084	-0.084	-0.108	-0.099
26	-0.326	0.096	0.096	-0.161	0.047
27	-0.361	-0.052	-0.053	-0.297	-0.152
28	0.287	0.295	0.298	0.435	0.486
29	-0.017	-0.102	-0.102	-0.019	-0.061
30	-1.443	0.174	0.173	-0.931	-0.092
$\mathrm{TDL}^R(k)$	-9.161	2.016	2.009	-5.754	0.000

表 D.2 $TLD^R(k)$ の計算結果 (IV–1 の場合)

No.	LD_i^R $k=0$ (LD_i)	$k=k_1$ $=0.191$	$k=k^*$ $=0.900$	$k=k^{**}$ $=0.894$	$k=k_2$ $=0.257$	$k=k_{opt}$ $=0.499$
1	0.227	0.156	0.049	0.049	0.133	0.086
2	0.084	0.406	0.829	0.827	0.466	0.642
3	0.085	-0.082	-0.124	-0.124	-0.092	-0.112
4	0.471	1.096	2.296	2.290	1.265	1.767
5	0.032	-0.054	-0.147	-0.146	-0.069	-0.105
6	9.003	7.777	6.434	6.434	7.432	6.717
7	0.139	-0.104	-0.033	-0.033	-0.094	-0.065
8	0.050	0.143	0.404	0.402	0.180	0.291
9	0.206	-0.078	-0.063	-0.063	-0.067	-0.054
10	0.088	0.075	-0.245	-0.244	0.010	-0.146
11	0.018	-0.012	0.020	0.020	-0.013	-0.001
12	6.683	4.910	3.945	3.948	4.727	4.298
13	0.017	-0.023	-0.039	-0.039	-0.034	-0.047
14	0.287	0.014	0.215	0.213	0.036	0.112
15	0.160	0.416	0.637	0.636	0.444	0.527
16	0.567	0.393	0.242	0.242	0.349	0.259
17	0.292	0.567	1.095	1.092	0.643	0.863
18	0.054	0.082	0.048	0.049	0.089	0.090
19	0.383	0.388	0.149	0.150	0.347	0.232
20	0.030	-0.006	0.051	0.051	0.007	0.041
21	1.055	0.546	0.550	0.548	0.511	0.473
22	0.453	-0.056	0.001	0.000	-0.061	-0.046
23	0.023	0.031	-0.163	-0.162	0.010	-0.064
24	0.059	-0.126	-0.133	-0.133	-0.145	-0.163
25	0.021	-0.024	-0.092	-0.092	-0.031	-0.056
26	0.246	0.029	0.039	0.038	0.013	0.006
27	0.141	0.131	0.020	0.020	0.110	0.057
28	0.065	-0.041	0.260	0.259	-0.016	0.103
29	0.020	-0.008	-0.053	-0.052	-0.009	-0.018
30	0.462	-0.078	-0.221	-0.222	-0.155	-0.257
$TLD^R(k)$	21.420	16.468	15.969	15.957	15.984	15.430

表 E.1　$\mathrm{TDL}^R(k)$ の計算結果 (V–1 の場合)

	DL_i				
	$k = k_1$	$k = k^*$	$k = k^{**}$	$k = k_2$	$k = k_{opt}$
No.	$= 0.685$	$= 0.805$	$= 0.798$	$= 0.683$	$= 1.147$
1	-0.395	-0.309	-0.314	-0.397	-0.143
2	0.137	0.120	0.121	0.138	0.083
3	-0.171	-0.201	-0.199	-0.170	-0.224
4	-0.072	-0.070	-0.070	-0.072	-0.061
5	-0.197	-0.131	-0.134	-0.198	-0.036
6	0.023	0.021	0.022	0.023	0.015
7	-0.141	-0.059	-0.063	-0.142	0.069
8	0.024	0.021	0.022	0.024	0.012
9	-0.044	-0.044	-0.044	-0.044	-0.042
10	-0.086	-0.081	-0.081	-0.086	-0.065
11	0.037	0.033	0.033	0.037	0.022
12	0.060	0.051	0.051	0.060	0.030
13	0.675	0.611	0.614	0.676	0.451
14	0.016	0.010	0.010	0.016	-0.003
15	-0.032	-0.024	-0.025	-0.032	-0.014
16	0.075	0.064	0.065	0.075	0.038
17	-0.285	-0.178	-0.183	-0.286	-0.010
18	0.018	0.021	0.021	0.018	0.018
19	-0.079	-0.078	-0.078	-0.079	-0.068
20	0.053	0.156	0.151	0.051	0.246
21	-0.085	-0.075	-0.075	-0.085	-0.055
22	-0.027	-0.023	-0.023	-0.027	-0.019
23	0.158	0.141	0.142	0.159	0.101
24	-0.342	-0.276	-0.280	-0.343	-0.144
25	-0.050	-0.047	-0.047	-0.050	-0.042
26	0.036	0.037	0.037	0.036	0.033
27	-0.036	-0.052	-0.052	-0.036	-0.070
28	0.173	0.139	0.141	0.174	0.083
29	-0.132	-0.095	-0.096	-0.133	-0.037
30	-0.254	-0.232	-0.233	-0.254	-0.169
$\mathrm{TDL}^R(k)$	-0.940	-0.548	-0.566	-0.946	0.000

表 E.2 $\mathrm{TLD}^R(k)$ の計算結果 (V–1 の場合)

No.	LD_i^R $k=0$ (LD_i)	$k=k_1$ $=0.685$	$k=k^*$ $=0.805$	$k=k^{**}$ $=0.798$	$k=k_2$ $=0.683$	$k=k_{opt}$ $=1.147$
1	0.657	0.168	0.126	0.128	0.169	0.052
2	0.252	-0.027	-0.011	-0.012	-0.027	0.023
3	1.958	2.340	2.317	2.319	2.340	2.243
4	0.041	0.007	-0.001	-0.001	0.007	-0.024
5	1.749	0.770	0.751	0.752	0.771	0.725
6	0.033	0.020	0.023	0.023	0.020	0.029
7	2.178	1.574	1.562	1.563	1.574	1.567
8	0.033	0.061	0.064	0.064	0.061	0.070
9	0.025	-0.014	-0.019	-0.019	-0.014	-0.034
10	0.056	-0.023	-0.033	-0.032	-0.023	-0.058
11	0.022	0.098	0.102	0.102	0.098	0.112
12	0.173	-0.020	-0.013	-0.013	-0.020	0.001
13	1.084	1.499	1.576	1.572	1.498	1.757
14	0.023	0.056	0.058	0.058	0.056	0.059
15	0.029	-0.058	-0.061	-0.061	-0.058	-0.068
16	0.078	0.099	0.108	0.107	0.099	0.125
17	0.859	0.086	0.059	0.060	0.087	0.031
18	0.120	-0.095	-0.093	-0.093	-0.095	-0.086
19	0.017	0.011	0.002	0.002	0.011	-0.023
20	1.949	0.133	0.146	0.145	0.133	0.220
21	0.041	0.001	-0.008	-0.008	0.002	-0.030
22	0.033	-0.050	-0.053	-0.053	-0.050	-0.060
23	0.078	0.201	0.219	0.218	0.201	0.260
24	0.324	-0.070	-0.107	-0.105	-0.070	-0.177
25	0.017	-0.026	-0.032	-0.032	-0.026	-0.047
26	0.063	0.046	0.051	0.050	0.046	0.063
27	0.053	0.126	0.121	0.121	0.126	0.099
28	0.302	0.693	0.711	0.710	0.692	0.748
29	0.469	-0.102	-0.116	-0.115	-0.102	-0.137
30	0.085	0.048	0.018	0.020	0.048	-0.050
$\mathrm{TLD}^R(k)$	12.802	7.556	7.468	7.472	7.557	7.391

参考文献

[1] Cook,R.D. and Weisberg,S. (1982), *Residuals and Influence in Regression*, New York: Chapman and Hall.

[2] Groβ, J. (2003), *Linear Regression*, Berlin: Springer.

[3] Hoerl, A. E. and Kennard, R. W. (1970), Ridge regression: biased estimation for nonorthogonal problems, *Technometrics*, **12**, 55–67.

[4] Hoerl, A. E., Kennard, R. W. and Baldwin, K. F. (1975), Ridge regression: some simulations, *Communications in Statistics — Theory and Methods*, **4**, 105–123.

[5] Lawless, J. F. and Wang, P. (1976), A simulation study of ridge and other regression estimators, *Communications in Statistics — Theory and Methods*, **5**, 307–323.

[6] Takeuchi, H. (1991), Detecting influential observations by using a new expression of Cook's distance, *Communications in Statistics — Theory and Methods*, **20**, 261–274.

[7] Takeuchi, H. (1994), Sensitivity analysis with an extension of Cook's distance in ridge regression, *Journal of the Japan Statistical Society*, **24**, 221–236.

[8] 竹内秀一 (2007), リッジ回帰における尤度距離による影響力評価, 人文自然科学論集, **123** 号, 3–16.

[9] 竹内秀一 (2008), 尤度距離におけるリッジパラメータに関する影響力, 人文自然科学論集, **125** 号, 57–71.

[10] 竹内秀一 (2010), 尤度距離におけるリッジパラメータの推定量の選定方法, 人文自然科学論集, **129** 号, 133–147.

[11] Thiart, C., Dunne, T. T., Troskie, C. G. and Chalton, D. O. (1993), A simulation study of biased estimators against the ordinary least squares estimator, *Communications in Statistics — Simulation and Computation*, **22**, 569–589.

[12] Walker, E. and Birch, J. B. (1988), Influence measures in ridge regression, *Technometrics*, **30**, 221–227 (Correction **30**, 469–470).