生産可能性曲面の図示

賀　川　昭　夫

生産可能性フロンティア（production possibilities frontier）は，経済が保有している生産技術を最も効率よく生産したときに得られる生産物の組合せとして表現するもので，経済学における重要な分析道具の1つである。たとえば生産物が2財の場合，貿易の利益は生産可能性曲線と一国の無差別曲線を用いて説明されるし，公共財の最適供給量の決定も生産可能性曲線と消費者の無差別曲線を用いて説明される。

しかし，かりに生産要素が1種類，たとえば労働だけであっても，生産者が3人で生産物が3種類あれば，決定しなければならない変数は4個あり[1)]，効率的な生産パターンをグラフから求めることは難しくなる。そのためなのか，生産物が3種類の場合の生産可能性曲面をグラフに示した教科書を寡聞にして知らない。この小論の目的は，目的関数もすべての制約条件式も直線となる数値例で，比較優位あるいは比較劣位という観点から効率的な生産パターンを求め，それを用いて生産可能性曲面を具体的にグラフ表示することである。この小論は，基礎的な経済理論を学習している学生を対象としたclassroom noteであるが，計算をフォローしなくても，グラフの説明を読むだけで内容は理解できるはずである。

I. 2生産者・2生産物の場合

本節では，マンキュー（2005）が用いた数値例を多少変更したものを用いる[2)]。2人の生産者（牛飼いと農夫）と，2種類の生産物（牛肉とジャガイモ）からなる経済を想定する。各生産者は40時間の労働時間を持っていて，1時間当たりの生産高が表I–1で与えられているとしよう（単位はkg）：

表I–1　2生産者・2生産物の場合

	1時間あたりの牛肉の生産高	1時間あたりのジャガイモの生産高
牛飼い	1/2	1/4
農　夫	1/20	1/5

生産可能性曲面の図示

牛肉生産にあてる時間を牛飼いがx，農夫がyとすると，ジャガイモの生産にあてる時間は牛飼いが$(40-x)$，農夫が$(40-y)$である。生産可能性曲線は，最も効率よく生産したときの牛肉とジャガイモの生産高の組合せを表すものである。したがって，生産可能性曲線を導出するには，「牛肉をBだけ生産するときに，ジャガイモの生産高Pを最大にする2人の労働時間(x, y)を見つけよ」という問題(1)を解けばよい：

$$(1)\quad \begin{cases} \max & P \equiv (1/4)(40-x)+(1/5)(40-y) \\ s.t. & B=(1/2)x+(1/20)y \\ & 0 \leq x, y \leq 40 \end{cases}$$

問題(1)[3)]を数学的に解くことは付録にまわし，比較優位（comparative advantage）の観点から解いてみよう。牛飼いが牛肉1kgを生産するためには2時間かかるが，その2時間をジャガイモの生産にあてればジャガイモ1/2kgを生産できるので，牛飼いにとって牛肉1kgの生産Bにかかる機会費用[4)]はジャガイモ1/2kgである（表I–2参照)。同様に，農夫が牛肉1kgを生産するためには20時間かかるが，その20時間をジャガイモの生産にあてればジャガイモ4kgを生産できるので，農夫にとって牛肉1kgの生産にかかる機会費用はジャガイモ4kgである（表I–2参照)。ジャガイモ生産の機会費用は，表I–3に示されている。ある財の生産において，より少ない機会費用をもつ生産者は，その財の生産に関して比較優位を持つという[5)]。したがって，表I–1の数値例では，牛飼いは牛肉生産に比較優位を持ち，農夫はジャガイモ生産に比較優位を持っている。そして，経済全体で効率よく生産するためには，各生産物をその財に比較優位を持つ生産者が生産すればよい。

表I–2　牛肉生産の機会費用

	牛肉	ジャガイモ
牛飼い	1	2/4
農　夫	1	20/5

表I–3　ジャガイモ生産の機会費用

	牛肉	ジャガイモ
牛飼い	4/2	1
農　夫	5/20	1

【ケース1： $0 \leq B \leq 20$】

牛飼いは比較優位を持つ牛肉をBだけ生産して，残りの時間をジャガイモの生産にあて，農夫はジャガイモだけを生産することが効率的な生産パターンである。したがって，$x=2B$, $y=0$なので，$P=(1/4)(40-2B)+(1/5)(40-0)$が成立する：

$$B+2P=36$$

【ケース2： $20 \leq B \leq 22$】

牛飼いは40時間すべてを牛肉の生産にあて，農夫は牛飼いが生産し残した牛肉$(B-20)$を

生産し，残りの時間をジャガイモ生産にあてることがが効率的な生産パターンである。したがって，$x = 40$，$y = 20(B - 20)$ なので，$P = (1/4)(40 - 40) + (1/5)\{40 - 20(B - 20)\}$ が成立する：

$$4B + P = 88$$

以上から，表I–1の数値例における生産可能性曲線は図I–1の太い折線 $A_1A_2A_3$ となる。点 A_1 は，牛飼いも農夫もジャガイモだけを生産する状態を表している。そこからスタートして牛肉も生産するとき，効率的な生産のためには，牛肉生産に比較優位を持つ牛飼いが牛肉を生産すればよい。農夫はジャガイモだけを生産し，牛飼いはジャガイモと牛肉を生産するときの牛肉とジャガイモの生産高の組合せが，線分 A_1A_2 で表される。そして，牛飼いが40時間すべてを牛肉の生産にあてる状態が点 A_2 で表される。さらに牛肉の生産高を増加させるときには，農夫も牛肉の生産に取りかかる。牛飼いは牛肉だけを生産し，農夫はジャガイモと牛肉を生産するときの牛肉とジャガイモの生産高の組合せが，線分 A_2A_3 で表される。そして，牛飼いも農夫も牛肉だけを生産する状態が，点 A_3 で表される。

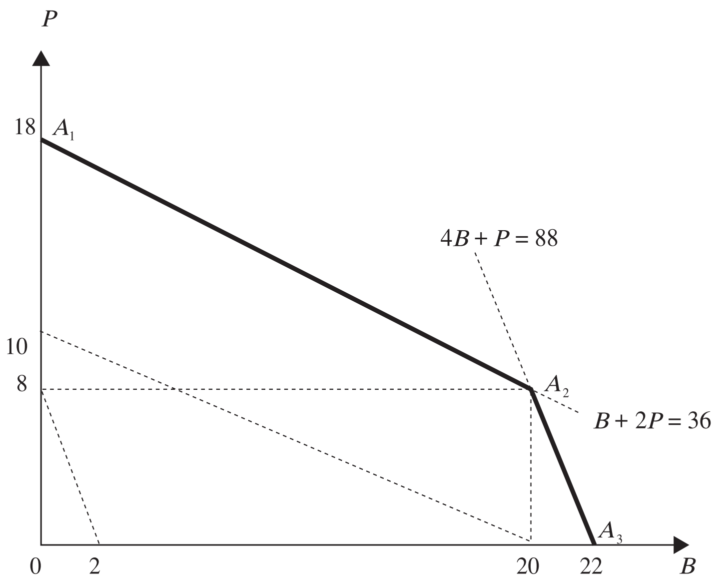


図 I–1　2 生産者・2 生産物の場合の生産可能性曲線

上では，牛肉の生産高が B に与えられているときに，その B を誰が生産すれば効率的かという観点から考えて，生産可能性曲線を導出した。それでは，ジャガイモの生産高 P がに与えられているとしたときにも，上で導出した生産可能性曲線が得られるのであろうか。それを見

るために，牛飼いと農夫がジャガイモの生産にあてる時間を u と v として，「ジャガイモを P だけ生産するとき，牛肉の生産高 B を最大にする 2 人の労働時間 (u, v) を見つけよ」という問題 (1)' を考える：

$$(1)' \quad \begin{cases} \max & B \equiv (1/2)(40-u) + (1/20)(40-v) \\ s.t. & P = (1/4)u + (1/5)v \\ & 0 \le u,\ v \le 40 \end{cases}$$

【ケース 1： $0 \le P \le 8$】

ジャガイモ生産に比較優位を持つ農夫がジャガイモを P だけ生産して，残りの時間を牛肉の生産にあて，牛飼いは牛肉だけを生産することが効率的な生産パターンである。したがって，$v = 5P$，$u = 0$，なので，$B = (1/2)(40-0) + (1/20)(40-5P)$ が成立する：

$$4B + P = 88$$

【ケース 2： $8 \le P \le 18$】

農夫は 40 時間すべてをジャガイモの生産にあて，牛飼いは農夫が生産し残したジャガイモ $(P-8)$ を生産し，残りの時間を牛肉の生産にあてることが効率的な生産パターンである。したがって，$v = 40$，$u = 4(P-8)$ なので，$B = (1/2)\{40 - 4(P-8)\} + (1/20)(40-40)$ が成立する：

$$B + 2P = 36$$

このように，問題 (1) を解くことで得られた生産可能性曲線は，問題 (1)' を解くことでも得られる。したがって，生産可能性曲線を導出するためには，牛肉とジャガイモのいずれの生産高を制約条件として与えておいても構わないのである。

比較優位と類似の概念として，絶対優位（absolute advantage）がある。ある財を生産するときに，より少ない労働投入量しか必要としない生産者は，その財の生産に関して絶対優位を持つという [6)]。表 I–1 の数値例では，牛肉 1kg を作るために牛飼いは 2 時間，農夫は 20 時間必要なので，牛飼いは牛肉生産に関して絶対優位を持っている。また，ジャガイモ 1kg 作るために牛飼いは 4 時間，農夫は 5 時間必要なので，牛飼いはジャガイモ生産に関しても絶対優位を持っている。上では比較優位の観点から考えて生産可能性曲線を導出したが，それが絶対優位と関係しているかも分からない。そこで，問題 (1)' を絶対優位の観点から解いてみよう。

【ケース 1： $0 \leq P \leq 10$】

ジャガイモ生産に絶対優位を持つ牛飼いがジャガイモをPだけ生産して，残りの時間を牛肉の生産にあて，農夫は牛肉だけを生産するとしよう。すると$u = 4P$，$v = 0$，なので，$B = (1/2)(40 - 4P) + (1/20)(40 - 0)$が成立する：

$$B + 2P = 22$$

【ケース 2： $10 \leq P \leq 18$】

牛飼いは40時間をジャガイモ生産にあて，農夫は牛飼いが生産し残したジャガイモ$(P - 10)$を生産し，残りの時間を牛肉生産にあてるとしよう。すると，$u = 40$，$v = 5(P - 10)$なので，$B = (1/2)(40 - 40) + (1/20)\{40 - 5(P - 10)\}$が成立する：

$$4B + P = 18$$

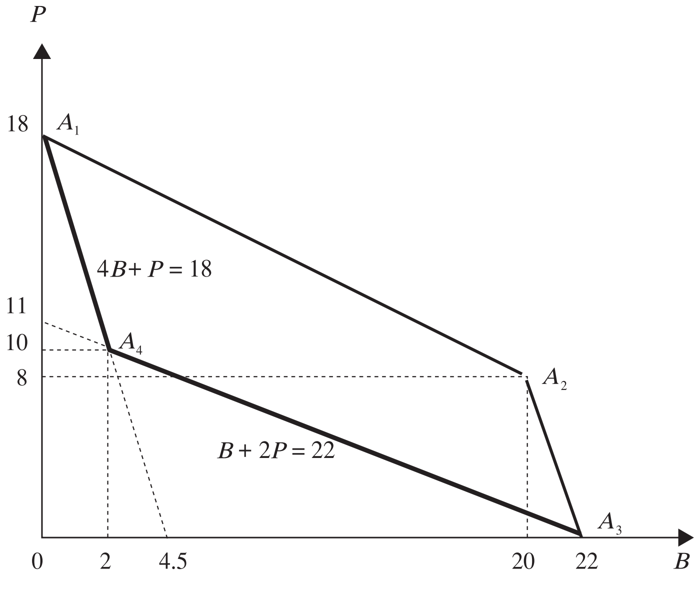


図 I–2　絶対優位のケース

これらを図示すれば図I–2の太い折線$A_1A_4A_3$となり，生産可能性曲線$A_1A_2A_3$の中側に位置していて，効率的な生産をもたらさないことが分かる[7)]。このように，社会全体での効率的生産は，絶対優位ではなく，比較優位で考えなければならないのである。

生産可能性曲面の図示

II. 3生産者・2生産物の場合の場合

3人の生産者（牛飼い，農夫，養鶏業者）と，2種類の生産物（牛肉，ジャガイモ）からなる経済を想定する。各生産者の1時間当たりの生産高が表IIで与えられているとすると，3人の中では牛飼いが牛肉生産に比較優位を持ち，農夫がジャガイモ生産に比較優位を持っている[8)]:

表II 3生産者・2生産物の場合

	1時間あたりの牛肉の生産高	1時間あたりのジャガイモの生産高
牛 飼 い	1/2	1/4
農 夫	1/20	1/5
養鶏業者	1/10	1/5

牛肉の生産にあてる時間を牛飼いがx，農夫がy，養鶏業者がzとすると，ジャガイモの生産にあてる時間は牛飼いが$(40-x)$，農夫が$(40-y)$，養鶏業者が$(40-z)$である。生産可能性曲線を導出するには，「牛肉をBだけ生産するときに，ジャガイモの生産高Pを最大にする2人の労働時間(x, y, z)を見つけよ」という問題(2)を解けばよい：

$$(2)\quad \begin{cases} \max & P \equiv (1/4)(40-x)+(1/5)(40-y)+(1/5)(40-z) \\ s.t. & B=(1/2)x+(1/20)y+(1/10)z \\ & 0 \leq x,\, y,\, z \leq 40 \end{cases}$$

【ケース1： $0 \leq B \leq 20$ 】

牛飼いは比較優位を持つ牛肉をBだけ生産して，残りの時間をジャガイモの生産にあて，農夫と養鶏業者はジャガイモだけを生産することが効率的な生産パターンである。したがって，$x=2B, y=0, z=0$なので, $P=(1/4)(40-2B)+(1/5)(40-0)+(1/5)(40-0)$が成立する：

$$B+2P=52$$

【ケース2： $20 \leq B \leq 24$ 】

牛飼いは40時間すべてを牛肉の生産にあてるが，彼が生産し残した牛肉$(B-20)$を農夫か養鶏業者のいずれかがが生産しなければならない。農夫と養鶏業者の2人を比較すれば，牛肉生産に比較優位を持つのは養鶏業者である。そこで，養鶏業者が牛飼いが生産し残した牛肉$(B-20)$を生産して，残りの時間をジャガイモの生産にあて，農夫はジャガイモだけを生産することが効率的な生産パターンである。したがって, $x=40$, $y=0$, $z=10(B-20)$なので, $P=(1/4)(40-40)+(1/5)(40-0)+(1/5)\{40-10(B-20)\}$が成立する：

$$2B + P = 56$$

【ケース 3： $24 \leq B \leq 26$ 】

牛飼いも養鶏業者も40時間すべてを牛肉の生産にあて，農夫は2人が生産し残した牛肉 $(B - 24)$ を生産して，残りの時間をジャガイモの生産にあてることが効率的な生産パターンである。したがって，$x = 40$，$y = 20(B - 24)$，$z = 40$ なので，$P = (1/4)(40 - 40) + (1/5)\{40 - 20(B - 24)\} + (1/5)(40 - 40)$ が成立する：

$$4B + P = 104$$

以上のことより，表IIの数値例における生産可能性曲線は図IIの太い折線 $A_1A_2A_3A_4$ となることが分かる。点 A_1 は, 全員がジャガイモだけを生産する状態を表している。そこからスタートして牛肉も生産するとき，牛肉生産に比較優位を持つ牛飼いが牛肉の生産に乗り出す。牛飼いが40時間すべてを牛肉の生産にあてる状態が，点 A_2 で表される。点 A_2 からさらに牛肉の生産高を増やすとき，養鶏業者が牛肉の生産に取りかかる。養鶏業者も40時間すべてを牛肉の生産にあてる場合が，点 A_3 で表される。点 A_3 からさらに牛肉の生産高を増やすとき，牛肉生産が最も得意でない農夫も牛肉の生産に取りかかる。そして，全員が牛肉だけを生産する状態が点 A_4 で表わされる。

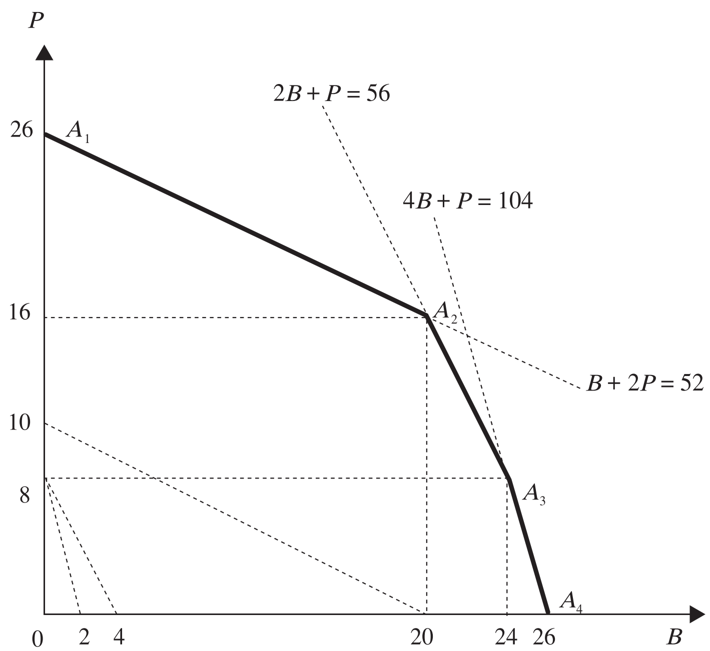


図 II　3 生産者・2 生産物の場合の生産可能性曲線

III. 2生産者・3生産物の場合の場合

2人の生産者（牛飼い，農夫）と，3種類の生産物（牛肉，ジャガイモ，鶏卵）からなる経済を想定する。各生産者の1時間当たりの生産高が表IIIで与えられているとすると，3種類の生産物の中では牛飼いが牛肉生産に比較優位を持ち，農夫が鶏卵生産に比較優位を持っている[9)]:

表 III–1　2生産者・3生産物の場合

	1時間あたりの 牛肉の生産高	1時間あたりの ジャガイモの生産高	1時間あたりの 鶏卵の生産高
牛飼い	1/2	1/4	1/20
農　夫	1/20	1/5	1/10

牛飼いが牛肉と鶏卵の生産にあてる時間をx_1とx_2，農夫が牛肉と鶏卵の生産にあてる時間をy_1とy_2とすると，ジャガイモの生産にあてる時間は牛飼いが$(40 - x_1 - x_2)$，農夫が$(40 - y_1 - y_2)$である。生産可能性曲面を導出するには，「牛肉をB，鶏卵をEだけ生産するときに，ジャガイモの生産高Pを最大にする2人の労働時間$(x_1, x_2; y_1, y_2)$を見つけよ」という問題(3)を解けばよい：

$$(3)\quad \begin{cases} \max & P \equiv (1/4)(40 - x_1 - x_2) + (1/5)(40 - y_1 - y_2) \\ s.t. & B = (1/2)x_1 + (1/20)y_1 \\ & E = (1/20)x_2 + (1/10)y_2 \\ & 0 \leq x_1, x_2, y_1, y_2 \leq 40 \end{cases}$$

【ケース1： $0 \leq B \leq 20$，$0 \leq E \leq 4$】

牛飼いは比較優位を持つ牛肉Bを生産するが，農夫が比較優位を持つ鶏卵は生産せず，農夫は比較優位を持つ鶏卵Eを生産するが，牛飼いが比較優位を持つ牛肉は生産しないことが効率的な生産パターンである。したがって，$x_1 = 2B$，$y_1 = 0$，$y_2 = 10E$，$x_2 = 0$なので，$P = (1/4)(40 - 2B - 0) + (1/5)(40 - 0 - 0)$が成立する：

$$B + 2P + 4E = 36$$

【ケース2： $0 \leq B \leq 20$，$4 \leq E \leq 6$】

農夫は40時間すべてを鶏卵生産にあて，牛飼いは牛肉Bと農夫が生産し残した鶏卵$(E - 4)$も生産することが効率的な生産パターンである[10)]。したがって，$x_1 = 2B$，$y_1 = 0$，$y_2 = 40$，$x_2 = 20(E - 4)$なので，$P = (1/4)\{40 - 2B - 20(E - 4)\} + (1/5)(40 - 0 - 40)$が成立する：

$$B + 2P + 10E = 60$$

【ケース 3： $20 \leq B \leq 22$，$0 \leq E \leq 4$】

牛飼いは40時間すべてを牛肉生産にあて，農夫は鶏卵Eと牛飼いが生産し残した牛肉$(B-20)$を生産することが効率的な生産パターンである[11]。したがって，$x_1=40$，$y_1=20(B-20)$，$y_2=10E$，$x_2=0$なので，$P=(1/4)(40-40-0)+(1/5)\{40-20(B-20)-10E\}$が成立する：

$$4B+P+2E=88$$

【ケース 4： $20 \leq B \leq 22$，$4 \leq E \leq 6$】

牛飼いは40時間すべてを牛肉の生産にあて，農夫も40時間すべてを鶏卵の生産にあてることが効率的な生産パターンである。したがって，$x_1=40$，$y_1=0$，$y_2=40$，$x_2=0$なので，$B=20$，$E=4$，$P=0$である。

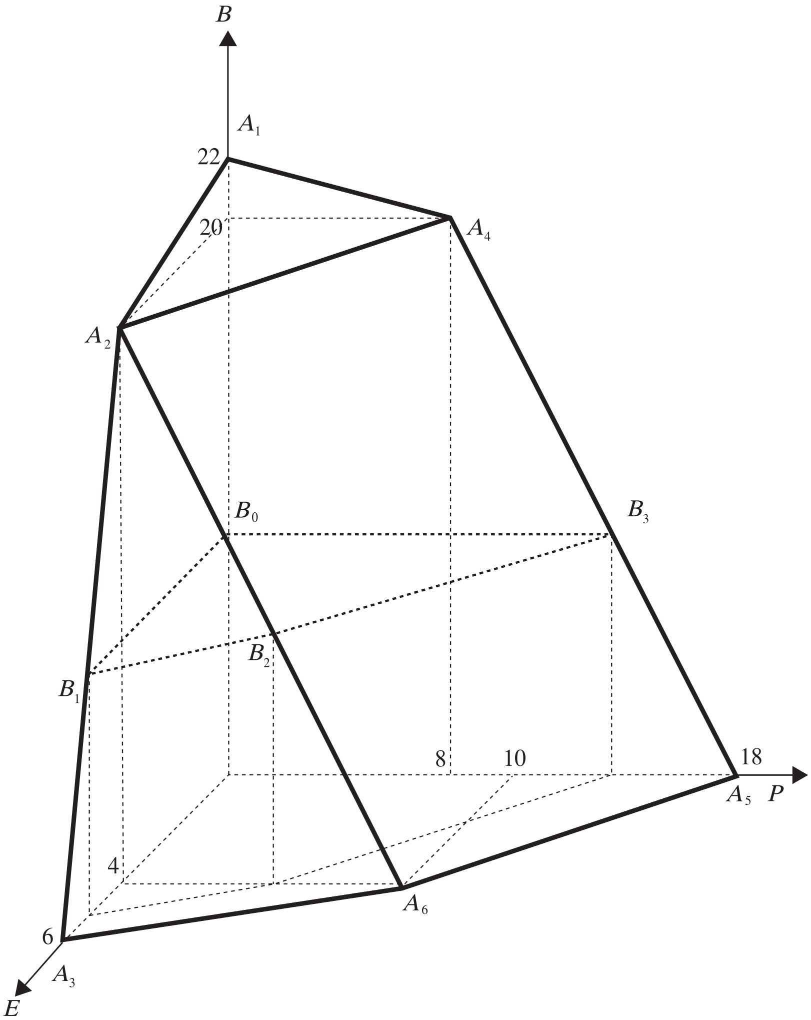


図 III–1　2 生産者・3 生産物の場合の生産可能性曲線

図III–1のA_1～A_6の各端点は，牛飼いも農夫もただ1種類の生産物の生産に特化している状態を表していて，たとえば点A_2は牛飼いは牛肉，農夫は鶏卵だけを生産する状態を表している。3次元空間の3点X，Y，Zを通る平面を平面(XYZ)と表わすことにして，たとえば点A_1をとりあげると，点A_1と他の2つの端点を通る平面は，平面$(A_1A_2A_3)$，平面$(A_1A_2A_6)$，平面$(A_1A_2A_5)$，平面$(A_1A_4A_3)$，平面$(A_1A_4A_6)$，平面$(A_1A_4A_5)$，平面$(A_1A_3A_5)$，平面$(A_1A_3A_6)$がある。しかし，これらのいずれも，2つの三角形（$\Delta A_1A_2A_6$と$\Delta A_2A_3A_6$）や1つの平行四辺形（$A_2A_6A_5A_4$）[12)]の内側に位置していることが，図III–1から読みとれる。社会的に効率的な生産を表す生産可能性曲面は，端点A_1～A_6のうちの任意の3点を通る平面で，最も外側に位置する平面から構成されるもの[13)]なので，この数値例での生産可能性曲面は，これらの2つの三角形（$\Delta A_1A_2A_6$と$\Delta A_2A_3A_6$）と1つの平行四辺形（$A_2A_6A_5A_4$）で構成されることになる。

これら2つの三角形と平行四辺形が【ケース1】～【ケース3】で得られた効率的生産のパターンを表していることを確かめるために，それらの平面の方程式を求めれば，次が得られる[14)]：

平面$(A_1A_2A_4)$：$4B+P+2E=88$

平面$(A_2A_3A_6)$：$B+2P+10E=60$

平面$(A_2A_6A_5A_4)$：$B+2P+4E=36$

これらは，【ケース1】～【ケース3】で得られた効率的生産のパターンと一致している。したがって，この数値例での生産可能性曲面は，三角形の平面$(A_1A_2A_4)$，三角形の平面$(A_2A_3A_6)$と平行四辺形の平面$(A_2A_6A_5A_4)$という3つの平面で構成されていることが確認できた。

それでは，生産可能性曲面が平行四辺形の平面を持つ理由を考えてみよう[15)]。

❶効率的な生産のためには，牛肉を生産するときには，比較優位を持つ牛飼いから生産を始めればよい。農夫が牛肉を生産しないとき，彼が生産するジャガイモと鶏卵の組合せは，線分A_6A_5で表されるが，これと線分A_2A_4は傾きも長さも同じである。したがって，牛肉の生産高が20kgのとき，牛飼いは40時間すべてを牛肉生産に当てるので，牛飼いと農夫によるジャガイモと鶏卵の効率的な生産高の組合せは線分A_2A_4で表される。

❷牛肉の生産高が0kgであれば，牛飼いは牛肉を一切生産しない。このとき，牛飼いが生産するジャガイモと鶏卵の組合せは線分A_3A_6で表されるので，牛飼いと農夫によるジャガイモと鶏卵の効率的な生産高の組合せは折線$A_3A_6A_5$で表される。

❸牛肉の生産高Bが20kg未満のときには，牛飼いは何時間かを牛肉の生産にあてるが，40時間を使い切ることはない。残りの時間で牛飼いが生産できるジャガイモと鶏卵の組合せは，線分A_3A_6の傾きを変えず長さを縮小した線分で表される。たとえば，牛肉の生産高が図III–1のB_0であれば，ジャガイモと鶏卵の社会全体での効率的な生産高の組合せは，点B_0を通り$E-P$平面に平行な面で切った切り口$B_1B_2B_3$で表される。このとき，農夫は牛肉を生産しないので，線分B_2B_3は線分A_6A_5と平行で長さも等しいが，牛飼いは牛肉をB_0だけ生産するので，線分B_1B_2は線分A_3A_6と平行ではあるが長さは線分A_4A_6より短い。つまり，平行四辺形

の平面 $(A_2A_6A_5A_4)$ は，農夫が牛肉を生産せずジャガイモと鶏卵だけを生産する状態を表しているのである。このことから，生産者の誰かが3種類の生産物の中の1種類について比較優位を持てば，生産可能性曲面は平行四辺形の平面を含むことが分かる。

縦軸に鶏卵をとって生産可能性曲面を書いて見ると，線分 A_4A_5 あるいは線分 A_2A_6 は牛飼いが鶏卵を一切生産せず，牛肉とジャガイモだけを生産する状態を表していることが理解できる。しかし，図III–2のように，縦軸にジャガイモをとったときには，議論はすこし複雑になる。かりにジャガイモの生産高を P_0 とすると，高さ P_0 で $B-E$ 平面に平行な面で生産可能性曲面を切った切り口が $P_1P_2P_3P_4$ である。

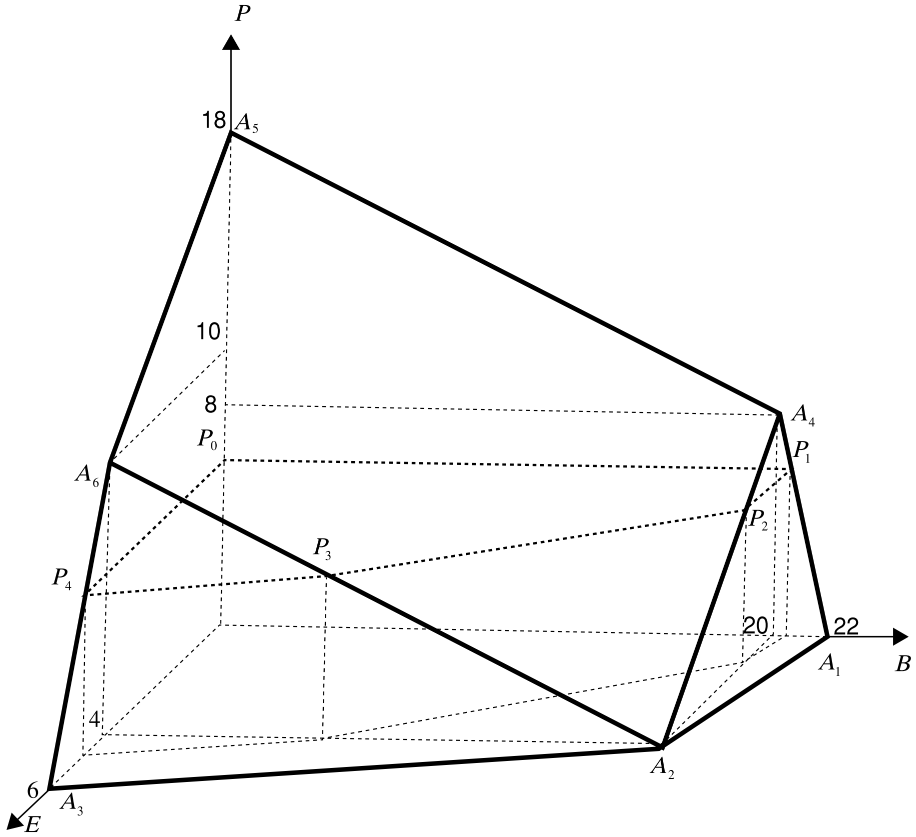


図 III–2　ジャガイモを垂線にはかる

❶点 P_1 は，2人でジャガイモを P_0 だけ作るときの牛肉の最大生産高の状態を表すので，牛肉生産に比較優位を持つ牛飼いは40時間を牛肉生産にあて，農夫はジャガイモ P_0 を生産し残りの時間を牛肉の生産にあてている状態である。

❷点 P_1 からスタートして鶏卵も生産することになると，最初は鶏卵生産に比較優位を持つ農夫が鶏卵の生産に乗り出す。農夫が鶏卵も生産し出せば，牛肉と鶏卵の生産高の組合せは線

分 P_1P_2 上を動く。むろん，線分 P_1P_2 は線分 A_1A_2 と平行である。そして，農夫がジャガイモを P_0 だけ生産し，残りの時間すべてを鶏卵の生産に当てる状態が，点 P_2 である。

❷点 P_2 からは，牛飼いは牛肉以外も生産しなければならないが，彼は何を生産すべきであろうか。牛飼いの鶏卵生産の機会費用は，牛肉で見てもジャガイモで見ても農夫の鶏卵生産の機会費用よりも大きい（表III–2参照)。そこで，ある財の生産において，他の生産者と比べて，他のどの財で測っても大きい機会費用をもつ生産者は，その財の生産に関して比較劣位（comparative disadvantage）を持つ，と定義すれば，牛飼いは鶏卵生産に比較劣位を持っている[16)]。効率的な生産のためには，牛飼いは比較劣位を持つ鶏卵をできるだけ生産すべきではないので，次のようにすればよい：

①牛飼いは牛肉生産にあてたいくらかの時間をジャガイモの生産にあてる，

②牛飼いが生産するジャガイモの生産高だけ農夫はジャガイモの生産高を減らし，それで浮いた労働　時間を鶏卵の生産にあてる。

つまり，鶏卵については，比較劣位を持つ牛飼いが生産するのではなく，比較優位を持つ農夫が生産し，そのかわりに牛飼いは比較劣位を持っていないジャガイモを生産すればよいのである。牛飼いがジャガイモの生産を増加させていけば，牛肉と鶏卵の生産高の組合せは線分 P_2P_3 上を動く。そして，牛飼いがジャガイモを P_0 だけ生産し，残りの時間すべてを牛肉の生産に当てる状態が，点 P_3 である。

表 III–2　鶏卵生産の機会費用

	牛　肉	ジャガイモ	鶏　卵
牛飼い	10	5	1
農　夫	1/2	2	1

❹点 P_3 からは，農夫は鶏卵だけを生産し，牛飼いはジャガイモを P_0 だけ生産し，残りの時間を牛肉と鶏卵の生産に当てることになる。そのとき，ジャガイモと鶏卵の生産高の組合せは線分 P_3P_4 上を動くが，これは線分 A_2A_3 と平行である。そして，牛飼いが牛肉を一切生産しない状態が，点 P_4 である。

IV. 3 生産者・3 生産物の場合

3人の生産者（牛飼い，農夫，養鶏業者）と，3種類の生産物（牛肉，ジャガイモ，鶏卵）からなる経済を想定する。各生産者の1時間当たりの生産高が表IVで与えられているとすると，3人の中では，牛飼いが牛肉生産に比較優位を持ち，養鶏業者が鶏卵生産に比較優位を持つ。また，牛飼いと農夫の2人をジャガイモ生産と鶏卵生産で比較すると，農夫が鶏卵生産に比較

優位を持ち，農夫と養鶏業者の2人を牛肉生産とジャガイモ生産で比較すると，養鶏業者が牛肉生産に比較優位を持つ：

表 IV　3 生産者・3 生産物の場合

	1時間あたりの牛肉の生産高	1時間あたりのジャガイモの生産高	1時間あたりの鶏卵の生産高
牛 飼 い	1/2	1/4	1/20
農　夫	1/20	1/5	1/10
養鶏業者	1/10	1/5	1/2

牛飼いが牛肉と鶏卵の生産にあてる時間を x_1 と x_2，農夫が牛肉と鶏卵の生産にあてる時間を y_1 と y_2，養鶏業者が牛肉と鶏卵の生産にあてる時間を z_1 と z_2 とすると，ジャガイモの生産にあてる時間は，牛飼いが $(40-x_1-x_2)$，農夫が $(40-y_1-y_2)$，養鶏業者が $(40-z_1-z_2)$ である。生産可能性曲面を導出するには,「牛肉を B, 鶏卵を E だけ生産するという条件の下で, ジャガイモの生産高 P を最大にする3人の労働時間 $(x_1,\ x_2;\ y_1,\ y_2;\ z_1,\ z_2)$ を見つけよ」という問題(4) を解けばよい：

$$
(4)\quad \begin{cases} \max \quad P \equiv (1/4)(40-x_1-x_2)+(1/5)(40-y_1-y_2)+(1/5)(40-z_1-z_2) \\ s.t. \quad B=(1/2)x_1+(1/20)y_1+(1/10)z_1 \\ \qquad\;\; E=(1/20)x_2+(1/10)y_2+(1/2)z_2 \\ \qquad\;\; 0 \le x_1,\ x_2,\ y_1,\ y_2,\ z_1,\ z_2 \le 40 \end{cases}
$$

【ケース 1： $0 \le B \le 20$ かつ $0 \le E \le 20$】

牛肉生産に比較優位を持つ牛飼いが牛肉を B だけ生産し，鶏卵生産に比較優位を養鶏業者が鶏卵を E だけ生産することが効率的な生産パターンである。したがって，$x_1=2B$，$y_1=0$，$z_1=0$，$z_2=2E$，$x_2=0$，$y_2=0$ なので，$P=(1/4)(40-2B-0)+(1/5)(40-0-0)+(1/5)(40-0-2E)$ が成立する：

$$5B+4E+10P=260$$

これは図 IV–1 の平行四辺形 $A_6A_7A_9A_{10}$ を表している。ここで，3 次元空間における点の座標を (B, E, P) と表せば，点 A_{10} の座標は $(20, 20, 8)$ であり，牛飼いは牛肉生産に，養鶏業者は鶏卵生産に，農夫はジャガイモ生産に特化したときの生産高の組合せを表している。

【ケース 2： $0 \le B \le 20$ かつ $20 \le E \le 24$】

牛飼いは牛肉を B だけ生産し，養鶏業者は40時間すべてを鶏卵の生産にあて，牛飼いと農

夫の2人をジャガイモ生産と鶏卵生産で比較すると，農夫が鶏卵生産に比較優位を持っているので，養鶏業者が生産し残した$(E-20)$を農夫が生産することが効率的な生産パターンである。したがって，$x_1=2B$，$y_1=0$，$z_1=0$，$z_2=40$，$y_2=10(E-20)$，$x_2=0$なので，$P=(1/4)(40-2B-0)+(1/5)\{40-0-10(E-20)\}+(1/5)(40-0-2E)$が成立する：

$$B+4E+2P=116$$

これは図 IV–1 の平行四辺形 $A_3A_8A_9A_{10}$ を表している。

【ケース 3： $0 \leq B \leq 20$ かつ $24 \leq E \leq 26$】

牛飼いは牛肉をBだけ生産し，養鶏業者と農夫は40時間すべてを鶏卵の生産にあて，彼らが生産し残した$(E-24)$を牛飼いが生産することが効率的な生産パターンである。したがって，$x_1=2B$，$y_1=0$，$z_1=0$，$z_2=40$，$y_2=40$，$x_2=20(E-24)$なので，$P=(1/4)\{40-2B-20(E-24)\}+(1/5)(40-0-40)+(1/5)(40-0-40)$が成立する：

$$B+10E+2P=260$$

これは図 IV–1 の $\Delta A_3A_8A_8$ を表している。

【ケース 4： $20 \leq B \leq 24$ かつ $0 \leq E \leq 20$】

牛飼いは持ち時間40すべてを牛肉の生産にあて，養鶏業者は鶏卵Eを生産する。養鶏業者が鶏卵をEだけ生産するに必要な時間は$2E$なので，彼に残された時間は$(20-2E)$であり，牛飼いが生産し残した牛肉$(B-20)$を養鶏業者が生産するために必要な時間は$10(B-20)$である。

① $20-2E \geq 10(B-20)$ の場合：

養鶏業者が$(B-20)$を生産し，農夫はジャガイモだけを生産することが効率的な生産パターンである。したがって，$x_1=40$，$x_2=0$，$y_1=0$，$y_2=0$，$z_2=2E$，$z_1=10(B-20)$なので，$P=(1/4)(40-0-40)+(1/5)(40-0-0)+(1/5)\{40-10(B-20)-2E\}$が成立する：

$$10B+2E+5P=280$$

これは図 IV–1 の $\Delta A_5A_{10}A_6$ を表している。

② $20-2E \leq 10(B-20)$ の場合：

養鶏業者は彼に残された時間を牛肉生産にあて，牛飼いと養鶏業者が生産し残した牛肉$\{B-20-(1/10)(40-2E)\}$を農夫が生産することが効率的な生産パターンである。したがって，$x_1=40$，$x_2=0$，$y_1=20\{B-20-(1/10)(40-2E)\}$，$y_2=0$，$z_2=40$，$z_1=0$なので，$P=(1/4)(40-0-40)+(1/5)\{40-20[B-20-(1/10)(40-2E)]-0\}+(1/5)(40-0-0)$

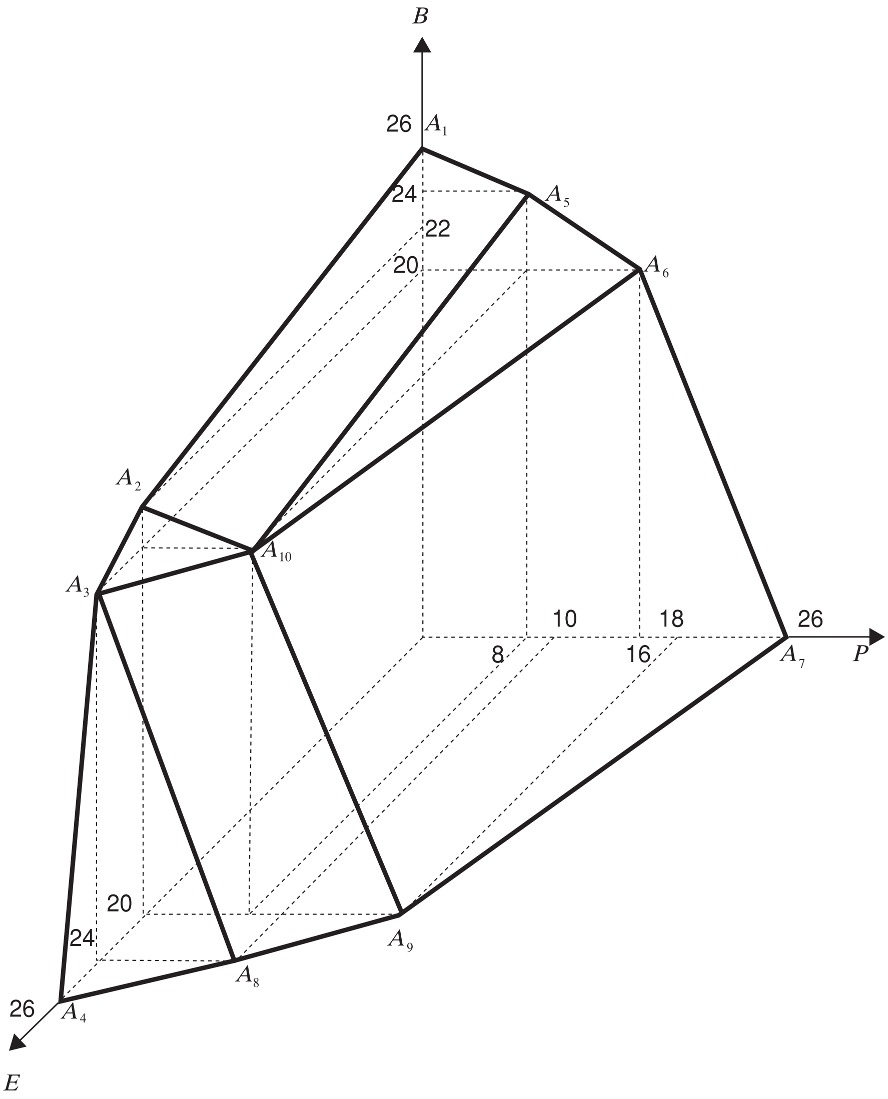


図 IV–1　3 生産者・3 生産物の場合の生産可能性曲線

が成立する：

$$20B + 4E + 5P = 520$$

これは図 IV–1 の平行四辺形 $A_1A_2A_{10}A_5$ を表している。そして，①と②を分ける条件，$40 - 2E = 10(B - 20)$ つまり，$5B + E = 120$ が $\Delta A_5A_{10}A_6$ と平行四辺形 $A_1A_2A_{10}A_5$ の境界線である線分 A_5A_{10} の式であることは，$20B + 4E + 5P = 520$ と $10B + 2E + 5P = 280$ から P を消去することから分かる。

【ケース5： $24 \leq B \leq 26$ かつ $20 \leq E \leq 26$】

牛飼いは40時間すべてを牛肉の生産にあて，養鶏業者も40時間すべてを鶏卵の生産にあて，農夫は生産され残った牛肉と鶏卵を生産することが効率的な生産パターンである。したがって，$x_1 = 40$，$x_2 = 0$，$z_2 = 40$，$z_1 = 0$，$y_1 = 20(B - 20)$，$y_2 = 10(E - 20)$ なので，$P = (1/4)(40 - 40 - 0) + (1/5)\{40 - 20(B - 20) - 10(E - 20)\} + (1/5)(40 - 0 - 40)$ が成立する：

$$4B + 2E + P = 128$$

これは図 IV–1 の $\Delta A_2A_3A_{10}$ を表している。

図IV–1の線分 A_6A_{10} と線分 A_7A_9 は，牛肉を一切生産しないときに養鶏業者が生産するジャガイモと鶏卵の組合せと表し，線分 $A_{10}A_3$ と線分 A_9A_8 は牛肉を生産しないときに農夫が生産するジャガイモと鶏卵の組合せを表している。これらは，牛肉生産に比較優位を持つ牛飼いだけが牛肉を生産するときの効率的な生産パターンを表している。

それでは，ジャガイモを縦軸にはかった図IV–2の生産可能性曲面を見てみよう。たとえばジャガイモの生産高が P_0 であれば，生産可能性曲面を高さ P_0 で $E - B$ 平面に平行に切った切り口が $P_1P_2P_3P_4P_5$ である。

❶点 P_1 はジャガイモを P_0 だけ生産し，鶏卵は生産しないときの牛肉の最大生産高の点を表している。この場合，牛肉生産に比較優位を持つ牛飼いは40時間すべてを牛肉の生産にあてることになるが，それではジャガイモを生産するのは農夫と養鶏業者のいずれであろうか。この2人でジャガイモと牛肉を比較すると，農夫の方がジャガイモの生産に比較優位をもっている。したがって，点 P_1 では農夫がジャガイモを P_0 だけ生産し，養鶏業者は牛肉だけを生産することになる。

❷点 P_1 からは鶏卵も生産することになるが，最初は鶏卵生産に比較優位を持つ養鶏業者が鶏卵の生産に取りかかる。点 P_2 は，養鶏業者が40時間すべてを鶏卵の生産にあてているときである。

❸点 P_2 からは農夫も鶏卵生産に乗り出す。点 P_3 では農夫がジャガイモ P_0 を生産し，残りの時間をすべて鶏卵の生産にあてる状態を表している。

❹点 P_3 からは牛飼いも，牛肉以外の生産物も生産することになるが，牛飼いは鶏卵生産に比較劣位を持っている。したがって，牛飼いはいくらかの時間をジャガイモの生産にあて，牛飼いが生産するジャガイモの生産高の分だけ，農夫はジャガイモの生産を縮小して，それを鶏卵の生産にまわすことが，効率的となる。そして点 P_4 では，牛飼いはジャガイモを P_0 だけ生産し，残りの時間を牛肉の生産にあて，農夫は鶏卵だけを生産している。線分 P_4P_5 は，牛飼いがジャガイモを P_0 だけ生産するときに，牛肉と鶏卵の組合せを表していて，点 P_5 は牛飼い

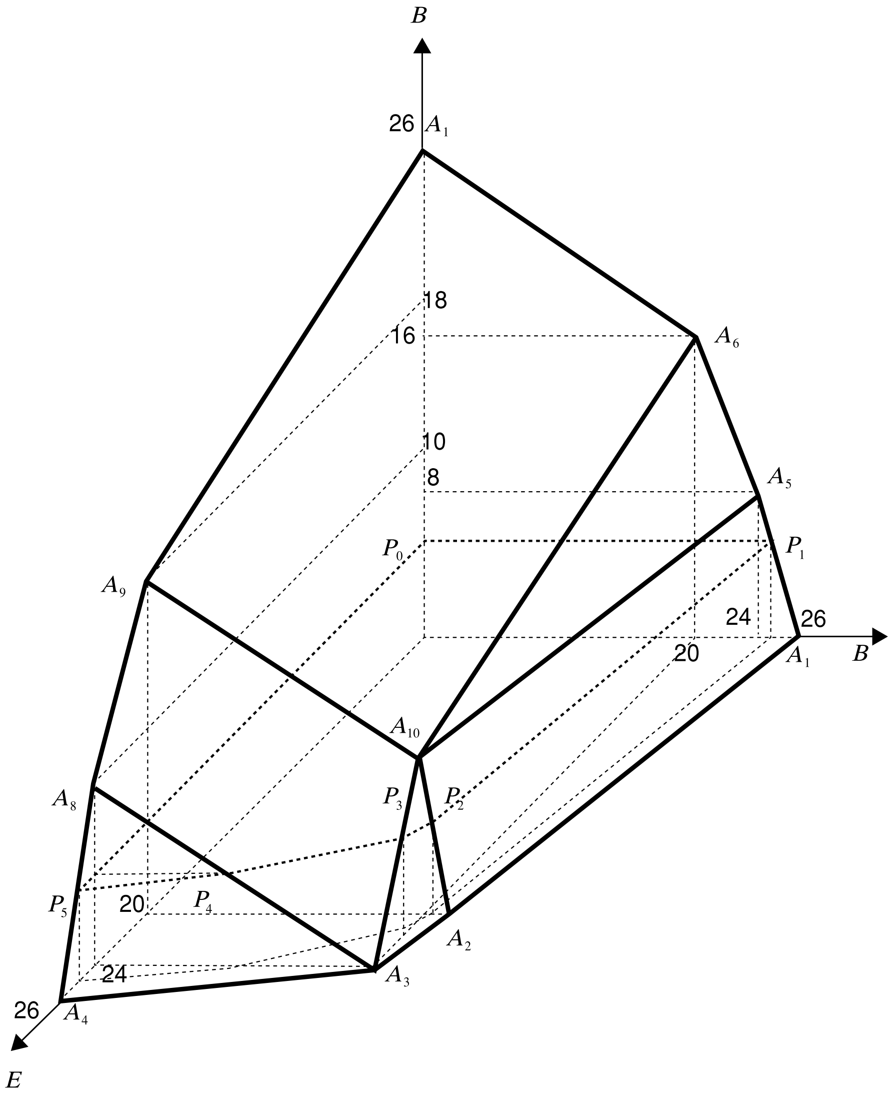


図 IV–2　ジャガイモを垂線にはかる

が牛肉を一切生産しないときを表している。

V. ジョーンズの数値例：比較劣位のケース

表IVの数値例では，3人の中で牛飼いが牛肉生産に，養鶏業者が鶏卵生産に比較優位を持っていたので，比較優位の観点から効率的な生産パターンを考えて，生産可能性曲面を導出した。しかし，どの生産者も比較優位を持つ財がないケースも考えられる。次の表Vは，ジョーン

ズ（1961）が3国・3財のリカード・モデルで，2国・2財についてリカードの比較生産費原理をみたす完全特化の状態が，3国・3財全体で見ると効率的な生産でない反例として提示した数値例である[17)]。

表Ⅴ　ジョーンズの数値例

	1時間あたりの 牛肉の生産高	1時間あたりの ジャガイモの生産高	1時間あたりの 鶏卵の生産高
牛飼い	1/2	1/10	1/3
農　夫	1/3	1/10	1/7
養鶏業者	1/4	1/10	1/5

表Ⅴの数値例では，牛肉1kg生産の機会費用をジャガイモで見ると，牛飼い2/10kg＜農夫3/10kg＜養鶏業者4/10kgであるが，鶏卵で見ると，農夫3/7kg＜牛飼い2/3kg＜養鶏業者4/5kgであり，牛肉1kg生産の機会費用がジャガイモで見ても鶏卵で見ても低いという生産者は存在していない。全く同様に，ジャガイモ1kg生産の機会費用が牛肉で見ても鶏卵で見ても低い生産者は存在しないし，鶏卵1kg生産の機会費用が牛肉で見てもジャガイモで見ても低いという生産者は存在しない。したがって，表Ⅴの数値例に対しては，比較優位の観点から生産可能性曲線を導出することは不可能である。

しかし，養鶏業者は牛肉生産に関して比較劣位を持ち，牛飼いはジャガイモ生産に関して比較劣位を持ち，農夫は鶏卵生産に関して比較劣位を持っている。経済全体での効率的な生産のためには，各生産者は比較劣位を持たない財の生産からスタートすべきである。したがって，与えられたBとEが小さければ，効率的な生産のためには，牛飼いは比較劣位を持つジャガイモの生産よりも牛肉と鶏卵の生産を優先させ，農夫は比較劣位を持つ鶏卵の生産よりも牛肉とジャガイモの生産を優先させ，養鶏業者は比較劣位を持つ牛肉の生産よりもジャガイモと鶏卵の生産を優先させるべきである。

どの生産者も42時間を持っているとする。牛飼いが牛肉と鶏卵の生産にあてる時間をx_1とx_2，農夫が牛肉と鶏卵の生産にあてる時間をy_1とy_2，養鶏業者が牛肉と鶏卵の生産にあてる時間をz_1とz_2とする。したがって，ジャガイモの生産にあてる時間は，牛飼いが$(42-x_1-x_2)$，農夫が$(42-y_1-y_2)$，養鶏業者が$(42-z_1-z_2)$である。生産可能性曲面を導出するには，「牛肉をB，鶏卵をEだけ生産するときに，ジャガイモの生産高Pを最大にする牛飼と農夫と養鶏業者の労働時間$(x_1, x_2; y_1, y_2; z_1, z_2)$を見つけよ」という問題(5)を解くことになる：

$$(5)\quad \begin{cases} \max & P \equiv (1/10)(42-x_1-x_2)+(1/10)(42-y_1-y_2)+(1/10)(42-z_1-z_2) \\ s.t. & B=(1/2)x_1+(1/3)y_1+(1/4)z_1 \\ & E=(1/3)x_2+(1/7)y_2+(1/5)z_2 \\ & 0 \leq x_1,\, x_2,\, y_1,\, y_2,\, z_1,\, z_2 \leq 42 \end{cases}$$

【ケース 1： $0 \leq B \leq 21$, $0 \leq E \leq 14$】

3 人の中で，ジャガイモと牛肉で比較すれば，牛飼いが牛肉生産に比較優位を持ち，ジャガイモと鶏卵で比較しても，牛飼いが鶏卵生産にも比較優位を持っている。したがって，効率的な生産のためには，牛飼いが牛肉 B と鶏卵 E を生産すればよいが，彼一人で B と E の両方を生産できる場合とできない場合がある：

① $0 \leq 2B + 3E \leq 42$ の場合：

牛飼いは牛肉 B と鶏卵 E の両方を生産して，残りの時間をジャガイモの生産にあて，農夫と養鶏業者はジャガイモだけを生産することが効率的な生産パターンである。したがって，$x_1 = 2B$, $x_2 = 3E$, $y_1 = y_2 = 0$, $z_1 = z_2 = 0$ なので，$10P = (42 - 2B - 3E) + (42 - 0 - 0) + (42 - 0 - 0)$ が成立する：

$$2B + 3E + 10P = 126$$

これは，図 V–1 の三角形 $A_6A_9A_7$ の平面を表している。

② $42 \leq 2B + 3E$ の場合：

牛飼いは42時間を使っても与えられた B と E を生産することができないので，他の生産者が牛肉か鶏卵を生産しなければならない。農夫が牛肉1kgを生産するときにはジャガイモ3/10kgを断念することになり，養鶏業者が鶏卵1kgを生産するときにはジャガイモ1/2kgを断念することになる。したがって，効率的な生産のためには，牛飼いは鶏卵を E だけ生産して，残りの時間を牛肉の生産にあて，農夫が牛飼いが生産し残した牛肉を生産することが効率的な生産パターンである。したがって，$x_2 = 3E$, $x_1 = 42 - 3E$, $y_1 = 3\{B - (1/2)(42 - 3E)\}$, $y_2 = 0$, $z_1 = z_2 = 0$ なので，$10P = \{42 - (42 - 3E) - 3E\} + \{42 - 3[B - (1/2)(42 - 3E)] - 0\} + (42 - 0 - 0)$ が成立する：

$$6B + 9E + 20P = 294$$

これは，図 V–1 の平行四辺形 $A_5A_{10}A_9A_6$ の平面を表している。ここで，A_{10} は (14, 14, 4.2) であり，牛飼いは鶏卵に，農夫は牛肉に，養鶏業者はジャガイモに生産を特化させた状況を表している。

【ケース 2： $0 \leq B \leq 14$, $14 \leq E \leq 22.4$】

$14 \leq E \leq 22.4$ なので，牛飼いと養鶏業者が鶏卵を生産しなければならないが，比較優位の観点から牛飼いは42時間すべてを鶏卵の生産にあて，養鶏業者は牛飼いが生産し残した鶏卵を生産して，残りの時間をジャガイモの生産にあて，農夫は牛肉を B だけ生産することが効率的な生産パターンである。したがって，$x_2 = 42$, $x_1 = 0$, $z_2 = 5(E - 14)$, $z_1 = 0$, $y_1 = 3B$, $y_2 = 0$ なので，$10P = (42 - 0 - 42) + (42 - 3B - 0) + \{42 - 0 - 5(E - 14)\}$ が成立する：

生産可能性曲面の図示

$$3B + 5E + 10P = 154$$

これは，図 V–1 の平行四辺形 $A_3A_8A_9A_{10}$ の平面を表している。

【ケース 3： $0 \leq B \leq 21$，$14 \leq E \leq 22.4$，$70 \leq 2B + 3E$】

【ケース 4： $21 \leq B \leq 35$，$0 \leq E \leq 14$，$70 \leq 2B + 3E$】

これらのケースでは，牛肉か鶏卵を少なくとも2人が生産しなければならない。(a) 牛飼いが鶏卵を E だけ生産して，残りの時間を牛肉の生産にあるとすると，この場合には，$70 \leq 2B + 3E$ なので，農夫は42時間を使っても牛飼いが生産し残した牛肉を生産しきれない。そこで，2人で生産しきれなかった残りの牛肉を，養鶏業者が生産しなければならないが，彼は牛肉生産に比較劣位を持つているので，生産は効率的にならないはずである。

したがって，(b) 牛飼いが牛肉を B だけ生産して，残りの時間を鶏卵の生産にあてるか，(c) 養鶏業者が42時間すべてを鶏卵生産にあてるか，(d) 農夫が42時間すべてを牛肉生産にあてるかである。付録VIで説明してあるように，(b) と (c) の場合は効率的な生産をもたらさず，このケースでの効率的な生産パターンは (d) である。つまり，農夫は42時間を牛肉生産に使い切り，牛飼いは農夫が生産し残した牛肉を生産して，残りの時間を鶏卵の生産にあて，養鶏業者は牛飼いが生産し残した鶏卵を生産することが効率的な生産パターンである。したがって，$y_1 = 42$，$x_1 = 2(B - 14)$，$x_2 = 42 - 2(B - 14)$，$z_2 = 5\{E - (1/3)[42 - 2(B - 14)]\}$，$z_1 = 0$，$y_2 = 0$ なので，$10P = \{42 - 2(B - 14) - [42 - 2(B - 14)]\} + (42 - 42 - 0) + \{42 - 0 - 5[E - (1/3)(42 - 2(B - 14))]\}$ が成立する：

$$10B + 15E + 30P = 476$$

これは，図 V–1 の平行四辺形 $A_2A_3A_{10}A_5$ の平面を表している [18)]。

【ケース 5： $0 \leq B \leq 14$，$22.4 \leq E \leq 28.4$】

牛飼いと養鶏業者が42時間すべてを鶏卵の生産にあて，農夫は牛肉を B だけ生産して，残りの時間を鶏卵の生産にあてることが効率的な生産パターンである。したがって，$x_2 = 42$，$x_1 = 0$，$z_2 = 42$，$z_1 = 0$，$y_1 = 3B$，$y_2 = 7(E - 22.4)$ なので，$10P = (42 - 0 - 42) + \{42 - 3B - 7(E - 22.4)\} + (42 - 0 - 42)$ が成立する：

$$15B + 35E + 50P = 994$$

これは，図 V–1 の三角形 $A_3A_4A_8$ の平面を表している。

【ケース 6： $35 \leq B \leq 45.5$，$0 \leq E \leq 14$】

牛飼いと農夫は42時間すべてを牛肉の生産にあて，養鶏業者は2人が生産し残した牛肉と鶏卵をEだけ生産することが効率的な生産パターンである。したがって，$x_1 = 42$，$x_2 = 0$，$y_1 = 42$，$y_2 = 0$，$z_1 = 4(B - 35)$，$z_2 = 5E$なので，$10P = (42 - 42 - 0) + (42 - 42 - 0) + \{42 - 4(B - 35) - 5E\}$が成立する：

$$4B + 5E + 10P = 182$$

これは，図 V–1 の三角形 $A_1A_2A_5$ の平面を表している。

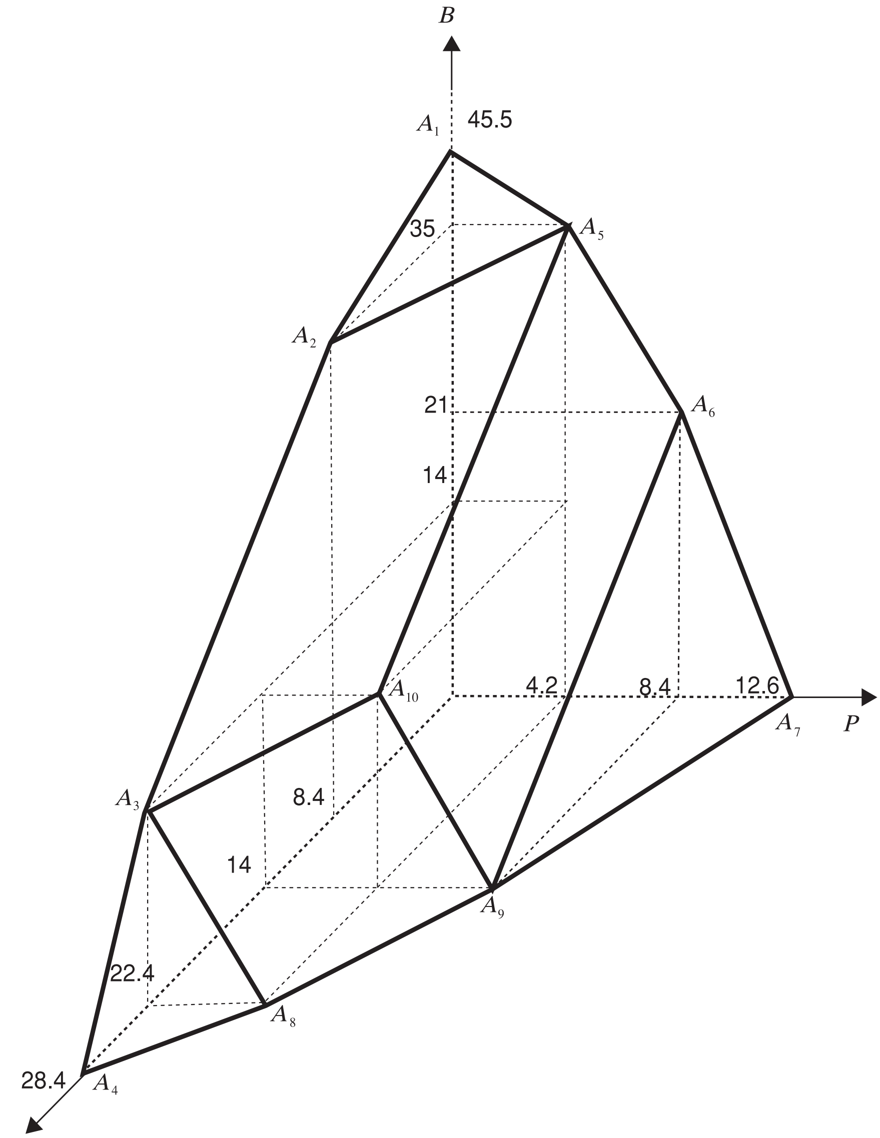
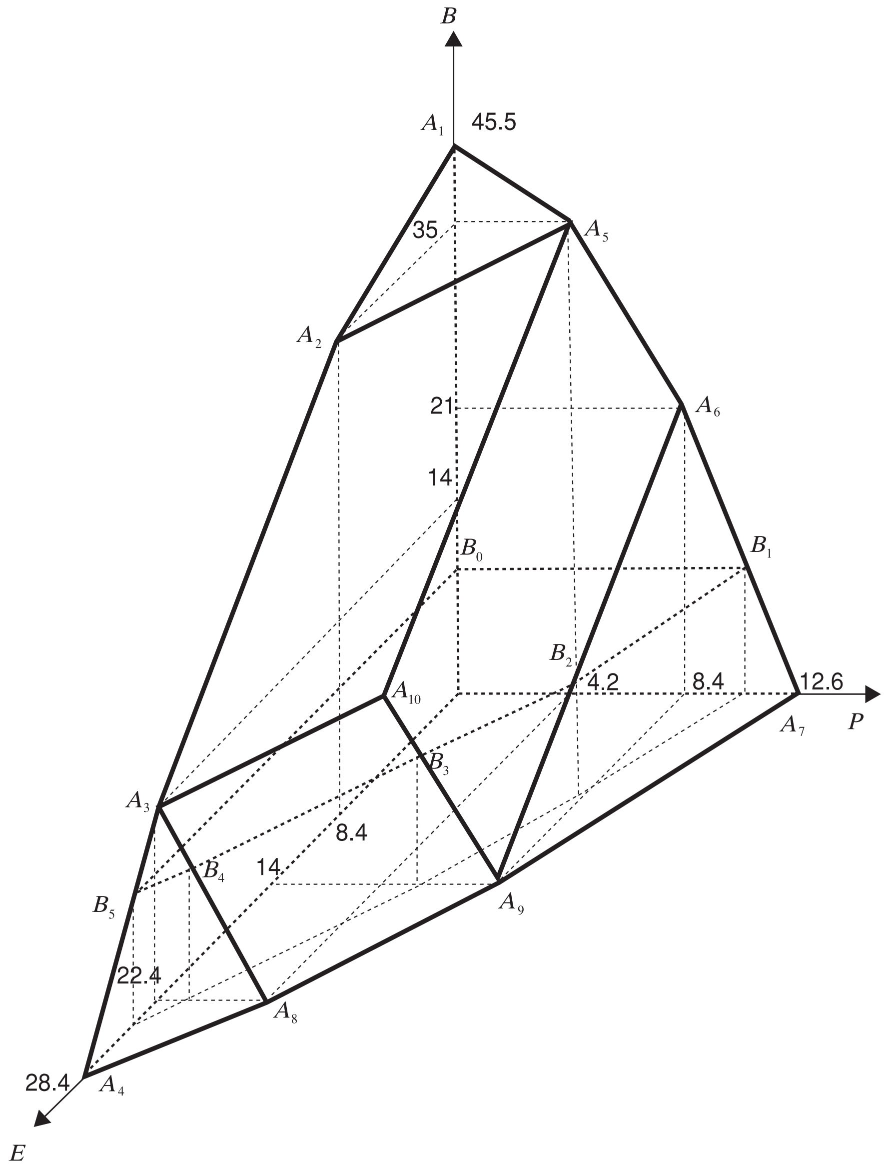


図 V–1　ジョーンズの数値例での生産可能性曲面

生産可能性曲面の図示

それでは，図V–2を用いて，3人の生産者が3種類の生産物をどのように生産するかを見ておこう。かりに牛肉の生産高がB_0に与えられたとする。高さB_0で平面$E-P$に平行な平面で生産可能性曲面を切った切り口が$B_1B_2B_3B_4B_5$である。



図V–2　効率的な生産パターン

❶点B_1は，牛肉をB_0だけ生産するときにジャガイモの生産高が最大になっている状態を表すので，3人の中で牛肉生産に絶対優位を持つ牛飼いが牛肉をB_0だけ生産して，残りの時間をジャガイモの生産にあて，農夫と養鶏業者はジャガイモだけを生産している。

❷点B_1からスタートして鶏卵も生産するとき，ジャガイモ生産に比較劣位を持つ牛飼いはジャガイモの生産高を減少させて，その分を鶏卵の生産にあてることになる。点B_2では，牛飼いは牛肉をだけ生産し残りの時間を鶏卵の生産にあて，農夫と養鶏業者はジャガイモだけを生産している。

❸点B_2からは，農夫か養鶏業者かが鶏卵を生産することになる。しかし，農夫は鶏卵生産に比較劣位を持ち，養鶏業者は牛肉生産に比較劣位をもっているので，効率的な生産の観点からは，牛飼いは牛肉生産を減少させて，その分を鶏卵の生産にあて，農夫は牛飼いが生産を減少させた牛肉を生産することが好ましい。したがって，点B_2からは，農夫が牛肉の生産を減少させて，それを農夫が肩代わりし，その代わりに牛飼いが鶏卵を生産することになる。点B_3では，牛飼いは鶏卵だけを生産し，農夫は牛肉をB_0だけ生産し残りの時間をジャガイモの生産に当て，養鶏業者はジャガイモだけを生産している。

❹点B_3からは，養鶏業者がジャガイモの生産を減らして鶏卵の生産を増やすことになる。点B_4では，養鶏業者が鶏卵だけを生産している。そして点B_4からは，農夫が鶏卵の生産に取りかかり，点B_5では農夫が牛肉をB_0だけ生産し残りの時間を鶏卵の生産にあて，牛飼いと養鶏業者は鶏卵だけを生産している。

付録 I：問題 (1) を解く

$$(1)\quad \begin{cases} \max \quad P \equiv (1/4)(40-x) + (1/5)(40-y) \\ s.t. \quad B = (1/2)x + (1/20)y \\ \qquad\quad 0 \leq x,\, y \leq 40 \end{cases}$$

問題(1)の制約条件式を，次のように変形する：

$$y = -\,10x + 20B$$

yには$0 \leq y \leq 40$という制約があるので，$0 \leq -\,10x + 20B \leq 40$，したがって，$2B-4 \leq x \leq 2B$でなければならず，$0 \leq x \leq 40$という制約もある。そこで，$0 \leq B \leq 2$，$2 \leq B \leq 20$，$20 \leq B \leq 22$の3つのケースに分けて最適解を求めればよい。しかし，$y = -\,10x + 20B$を目的関数に代入すると，

$$P = (7/4)x + 18 - 4B$$

となるので，Pはxの増加関数である。したがって，Pはxが動き得る範囲内の最も大きい値のときに最大となるので，2 つのケースに分けて考えればよい。

生産可能性曲面の図示

【ケース 1： $0 \leq B \leq 20$】

$\max\{2B-4\} \leq x \leq 2B$なので[19)]，$x=2B$のときに$P$は最大になる。このとき，$B+2P=36$が成立している。

【ケース 2： $20 \leq B \leq 22$】

$2B-4 \leq x \leq 40$なので，$x=40$のときにPは最大になる。このとき，$4B+P=88$が成立している。

付録 II：問題 (2) を解く

$$(2)\quad \begin{cases} \max & P \equiv (1/4)(40-x)+(1/5)(40-y)+(1/5)(40-z) \\ s.t. & B=(1/2)x+(1/20)y+(1/10)z \\ & 0 \leq x,\ y,\ z \leq 40 \end{cases}$$

牛肉についての制約条件式を書き直せば，

$$z=10B-5x-(1/2)y$$

となり，これを目的関数に代入すると

$$P=(3/4)x-(1/10)y+26-2B$$

となる。したがって，横軸にxをはかり縦軸にyをはかる平面で，目的関数は右上がりの直線で，Pはxの増加関数でありyの減少関数なので，下方に位置する等量線ほどジャガイモの生産高が大きいことが分かる。他方，zには$0 \leq z \leq 40$という制約があるので，$0 \leq 10B-5x-(1/2)y \leq 40$，したがって，$10B-40 \leq 5x+(1/2)y \leq 10B$でなければならない。これをみたす$(x,\ y)$は右下がりの 2 本の直線，$y=-10x+20B$と$y=-10x+(20B-80)$ではさまれた領域にある。したがって，この領域と$0 \leq x,\ y \leq 40$をみたす$(x,\ y)$のうちで，最も右下に位置する$(x,\ y)$でジャガイモの生産高は最大となる。ゆえに，$B$の大きさによって，3 つのケースに分けて考えればよい。

【ケース 1： $0 \leq B \leq 20$】

$0 \leq 2B \leq 40$ なので，制約条件をみたす $(x,\ y)$ の領域は，たとえば図II–1のようになる。したがって，図II–1から明らかなように，ジャガイモの生産高は $(x,\ y) = (2B,\ 0)$ で最大となる。このとき，$B + 2P = 52$ が成立している。

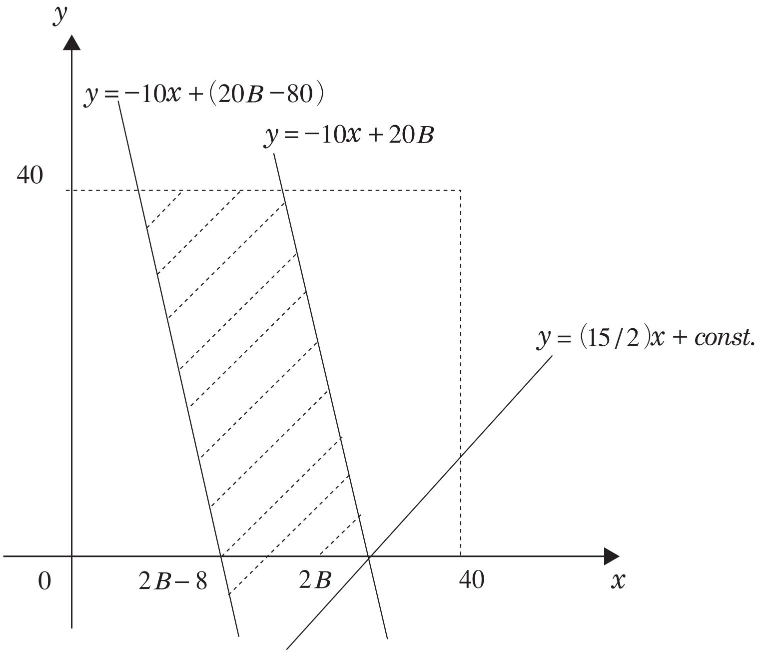


図 II–1

【ケース 2： $20 \leq B \leq 24$】

$0 \leq 2B - 12 \leq 2B - 8 \leq 40 \leq 2B$ なので，制約条件をみたす $(x,\ y)$ の領域は，たとえば図II–2のようになる。図II–2から明らかなように，ジャガイモの生産高は $(x,\ y) = (40,\ 0)$ で最大となる。このとき，$2B + P = 56$ が成立している。

【ケース 2： $24 \leq B \leq 26$】

$0 \leq 2B - 12 \leq 40 \leq 2B - 8$ なので，制約条件をみたす $(x,\ y)$ の領域は，たとえば図II–3のようになる。図II–3から明らかなように，ジャガイモの生産高は $(x,\ y) = (40,\ 20B - 480)$ で最大となる。このとき，$4B + P = 104$ が成立している。

生産可能性曲面の図示

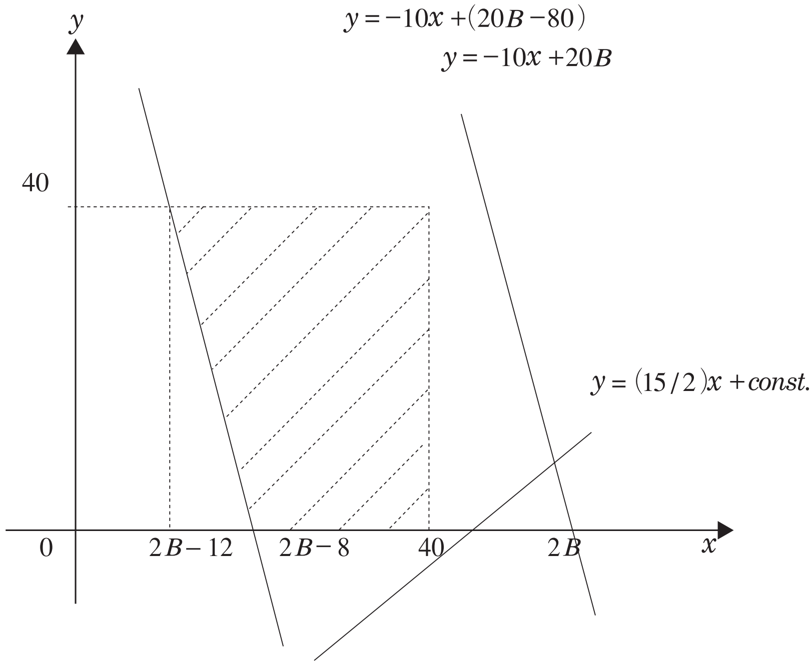


図 II–2

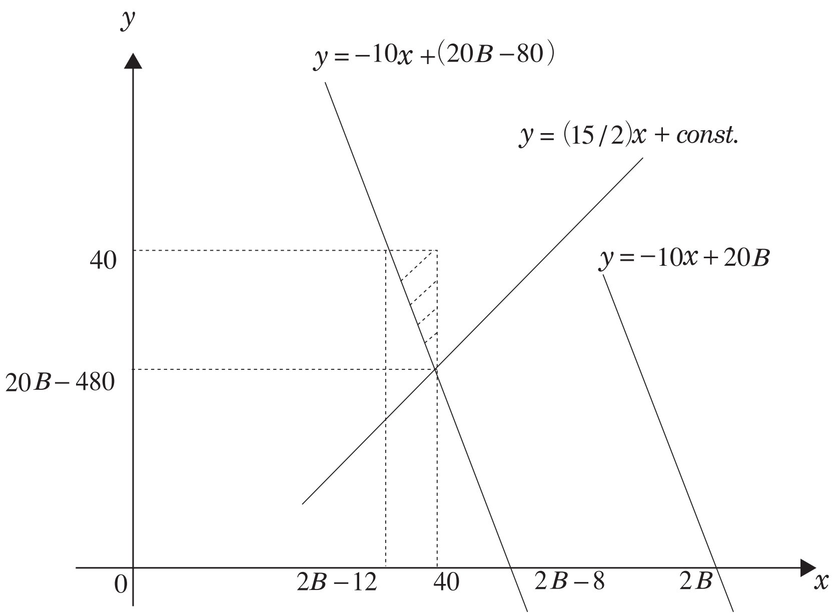


図 II–3

付録 III：問題 (3) を解く

$$
(3)\quad \begin{cases} \max & P \equiv (1/4)(40 - x_1 - x_2) + (1/5)(40 - y_1 - y_2) \\ s.t. & B = (1/2)x_1 + (1/20)y_1 \\ & E = (1/20)x_2 + (1/10)y_2 \\ & 0 \leq x_1,\, x_2,\, y_1,\, y_2 \leq 40 \end{cases}
$$

牛肉と鶏卵についての制約条件式を書き直せば，

$$y_1 = 20B - 10x_1$$

$$x_2 = 20E - 2y_2$$

となり，これを目的関数に代入すると

$$P = (7/4)x_1 + (3/10)y_2 + 18 - 4B - 5E$$

となる。したがって，横軸に x_1 をはかり縦軸に y_2 をはかる平面で，ジャガイモの等量線は右下がりであり，上方に位置する等量線ほどジャガイモの生産高は大きいことが分かる。

それでは制約条件についてである：第1に，x_1 と y_2 は，$0 \leq x_1,\, y_2 \leq 40$ をみたさなければならない。

第2に，y_1 には $0 \leq y_1 \leq 40$ という制約があるので，$0 \leq 20B - 4x_1 \leq 40$，したがって，$2B - 4 \leq x_1 \leq 2B$ でなければならない。第3に，x_2 にも $0 \leq x_2 \leq 40$ という制約があるので，$0 \leq 20E - 2y_2 \leq 40$，したがって，$10E - 20 \leq y_2 \leq 10E$ でなければならない。これらについて，丁寧に場合分けをして最適生産パターンを見つければよいが，目的関数が右下がりで，P は x_1 と y_2 の増加関数なので，すべての制約条件をみたす $(x_1,\, y_2)$ の中で最も右上に位置する $(x_1,\, y_2)$ で，ジャガイモの生産高は最大となることが分かる。したがって，次の4つのケースに分けて考えれば十分である：

【ケース1： $0 \leq B \leq 20$ かつ $0 \leq E \leq 4$】

$\max\{2B - 4,\, 0\} \leq x_1 \leq 2B$，$\max\{10E - 20,\, 0\} \leq x_1 \leq 10E$ なので，図III–1から明らかなように，ジャガイモの生産高は $(x_1,\, y_2) = (2B,\, 10E)$ で最大となる。このとき，$B + 2P + 4E = 36$ が成立している。

生産可能性曲面の図示

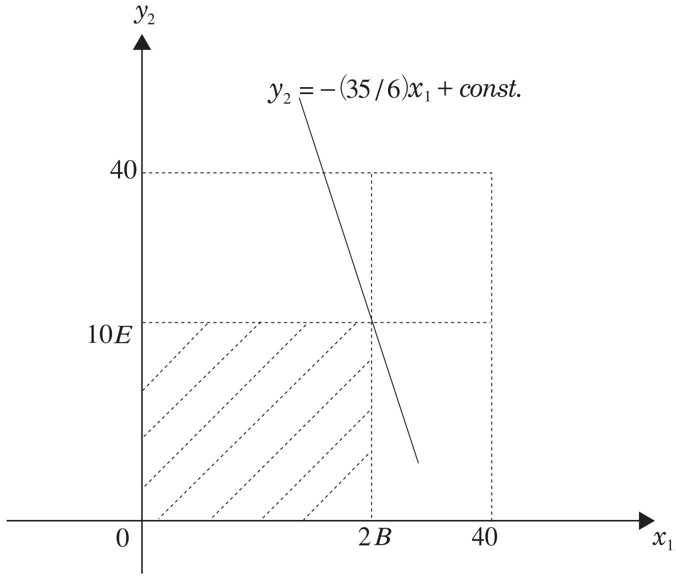


図 III–1　ケース 1

【ケース 2： $0 \leq B \leq 20$ かつ $4 \leq E \leq 6$ 】

$\max\{2B-4,\ 0\} \leq x_1 \leq 2B$, $10E-20 \leq y_2 \leq 40$ なので, 図III–2から明らかなように, ジャガイモの生産高は $(x_1,\ y_2) = (2B,\ 40)$ で最大となる。このとき, $B + 2P + 10E = 60$ が成立している。

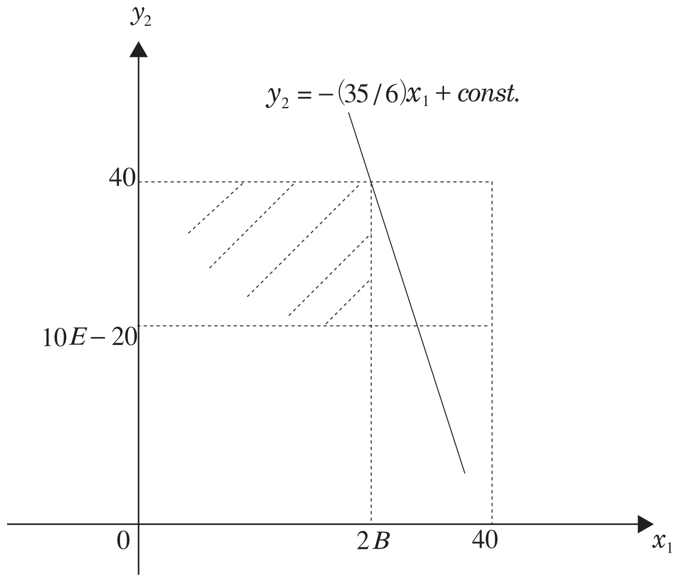


図 III–2　ケース 2

【ケース 3： $20 \leq B \leq 22$ かつ $0 \leq E \leq 4$】

$2B-4 \leq x_1 \leq 40$，$\max\{10E-20,\ 0\} \leq y_2 \leq 10E$なので，図III–3から明らかなように，ジャガイモの生産高は$(x_1,\ x_2)=(40,\ 10E)$で最大となる。このとき，$4B+P+2E=88$が成立している。

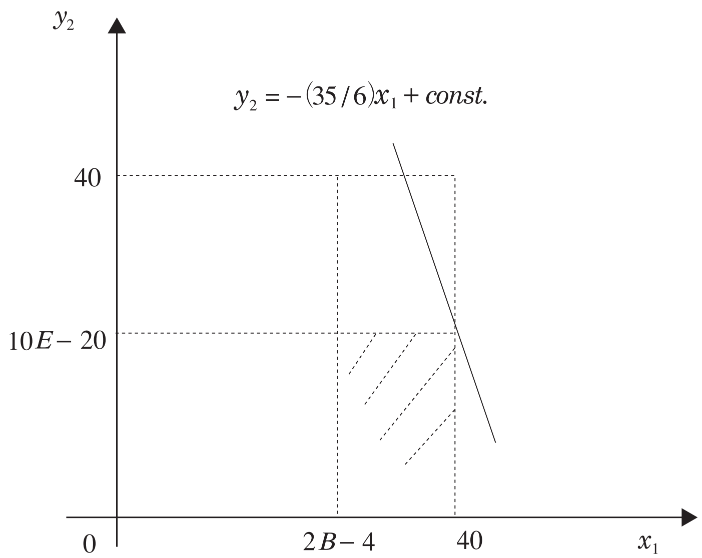


図 III–3　ケース 3

【ケース 4： $20 \leq B \leq 22$ かつ $4 \leq E \leq 6$】

$2B-4 \leq x_1 \leq 40$，$10E-20 \leq y_2 \leq 40$なので，最適な労働時間は$(x_1,\ y_2)=(40,\ 40)$となるが，このとき制約条件から$x_1=0$，$y_1=0$でなければならず，したがって，$P=0$となる。

付録 IV：問題 (4) を解く

$$
(4)\quad \begin{cases} \max & P \equiv (1/4)(40-x_1-x_2)+(1/5)(40-y_1-y_2)+(1/5)(40-z_1-z_2) \\ s.t. & B=(1/2)x_1+(1/20)y_1+(1/10)z_1 \\ & E=(1/20)x_2+(1/10)y_2+(1/2)z_2 \\ & 0 \leq x_1,\ x_2,\ y_1,\ y_2,\ z_1,\ z_2 \leq 40 \end{cases}
$$

【ケース 1： $0 \leq B \leq 20$ かつ $0 \leq E \leq 20$】

牛飼いが牛肉をBだけ生産し，養鶏業者が鶏卵をEだけ生産することが効率的な生産パターンとなるので，$x_1=2B$，$z_2=2E$である。すると，牛肉の制約条件から$y_1=0$と$z_1=0$が，

生産可能性曲面の図示

鶏卵の制約条件からx_2= 0とy_2= 0が成立するので，$P = (1/4)(40 - 2B) + (1/5)(40) + (1/5)(40 - 2E)$となる。したがって，次が得られる：

$$5B + 4E + 10P = 260$$

【ケース 2： $0 \leq B \leq 20$ かつ $20 \leq E \leq 26$】

牛飼いが牛肉をBだけが生産し，養鶏業者は40時間すべてを鶏卵の生産にあてることが効率的な生産パターンとなるので，x_1= 2B，z_2= 40である。すると，牛肉の制約条件から$y_1 = 0$とz_1= 0が成立し，鶏卵の制約条件は$E = (1/20)x_2 + (1/10)y_2 + 20$，つまり，$x_2 = 20E - 400 - 2y_2$となる。これらを目的関数に代入すると

$$\begin{aligned} P &= (1/4)\{40 - 2B - (20E - 400 - 2y_2)\} + (1/5)(40 - y_2) \\ &= 118 - (1/2)B - 5E + (3/10)y_2 \end{aligned}$$

となるので，Pはy_2の増加関数である。そして，x_2は$0 \leq x_2 \leq 40$をみたさなければならないので，$0 \leq 20E - 400 - 2y_2 \leq 40$，したがって，$10E - 220 \leq y_2 \leq 10E - 220$をみたさなければならない：

① $20 \leq E \leq 24$のとき:$y_2 \leq 10E - 200 \leq 40$となるので，$P$は$y_2 = 10E - 200$で最大となる。このとき，$P = 118 - (1/2)B - 5E + (3/10)(10E - 200)$となるので，次が得られる：

$$B + 4E + 2P = 116$$

② $24 \leq E \leq 26$のとき:$y_2 \leq 40 \leq 10E - 200$となるので，$P$は$y_2 = 40$で最大となる。このとき，$P = 118 - (1/2)B - 5E + (3/10)(40)$となるので，次が得られる：

$$B + 10E + 2P = 260$$

【ケース 3： $20 \leq B \leq 26$ かつ $0 \leq E \leq 20$】

牛飼いは持ち時間40すべてを牛肉の生産にあて，養鶏業者は鶏卵をEだけ生産することが効率的な生産パターンとなるので，$x_1 = 40$，$z_2 = 2E$である。すると，牛飼いの時間の制約条件から$x_2 = 0$，鶏卵の制約条件から$x_2 = 0$と$y_2 = 0$，そして牛肉の制約条件は$B = 20 + (1/20)y_1 + (1/10)z_1$，つまり，$y_1 = 20B - 400 - 2z_1$となる。これらを目的関数に代入すると

$$\begin{aligned} P &= (1/5)(40 - 20B + 400 + 2z_2) + (1/5)(40 - z_1 - 2E) \\ &= 96 - 4B - (2/5)E + (1/5)z_1 \end{aligned}$$

となるので，Pはz_1の増加関数であることが分かる。そして，y_1は$0 \leq y_1 \leq 40$をみたさな

ければならないので，$0 \leq 20B - 400 - 2z_1 \leq 40$，したがって，$10B - 220 \leq z_1 \leq 10B - 200$ でなければならない。また, 養鶏業者が鶏卵を E だけ生産するためにかかる時間は $2E$ なので, 彼に残された時間は $(40 - 2E)$ である：

① $40 - 2E \geq 10B - 200$ のとき：P は $z_1 = 10B - 200$ で最大となる。このとき，$P = 96 - 4B - (2/5)E + (1/5)(10B - 200)$ となるので，次が得られる：

$$10B + 2E + 5P = 280$$

② $10B - 200 \geq 40 - 2E$ のとき：P は $z_1 = 40 - 2E$ で最大となる。このとき，$P = 96 - 4B - (2/5)E + (1/5)(40 - 2E)$ となるので，次が得られる：

$$20B + 4E + 5P = 520$$

【ケース 4： $20 \leq B \leq 26$ かつ $20 \leq E \leq 26$】

牛飼いが持ち時間をすべて牛肉の生産にあて，養鶏業者も持ち時間をすべて鶏卵の生産にあてることが効率的な生産パターンとなるので，$x_1 = 40$，$z_2 = 40$ である。このとき，時間の制約条件から $x_2 = 0$，$z_1 = 0$ が成立するので，牛肉の制約条件が $B = 20 + (1/20)y_1$，鶏卵の制約条件が $E = (1/10)y_2 + 20$ となる。したがって，$P = (1/5)(40 - 20B + 400 - 10E + 200)$ となるので，次が得られる：

$$4B + 2E + P = 128$$

付録 V：問題 (5) を解く

$$(5)\quad \begin{cases} \max & P \equiv (1/10)(42 - x_1 - x_2) + (1/10)(42 - y_1 - y_2) + (1/10)(42 - z_1 - z_2) \\ s.t. & B = (1/2)x_1 + (1/3)y_1 + (1/4)z_1 \\ & E = (1/3)x_2 + (1/7)y_2 + (1/5)z_2 \\ & 0 \leq x_1,\, x_2,\, y_1,\, y_2,\, z_1,\, z_2 \leq 42 \end{cases}$$

与えられた B と E が大きくなければ，各生産者は自分が比較劣位を持つ財の生産に携わる必要がない。そこで，上の問題で $y_2 = 0$ と $z_1 = 0$ と想定しよう。すると，それぞれの制約条件式を

$$y_1 = 3B - (3/2)x_1$$
$$z_2 = 5E - (5/2)x_1$$

と書き直すことができる。これらを目的関数に代入すると，次が得られる：

$$10P = 126 - 3B - 5E + (1/2)x_1 + (2/3)x_2$$

横軸にx_1をはかり，縦軸にx_2をはかる平面に目的関数を示せば，傾きが $-(3/4)$の右下がりの直線であり，その直線が上にシフトしていくほどジャガイモの生産高は大きくなる。

次に，$0 \leq y_1 \leq 42$から$2B - 28 \leq x_1 \leq 2B$が成立しなければならないので，Bに関して次の3つのケースに分ける必要がある：

①$0 \leq B \leq 14$のケース：$2B - 28 \leq 0 \leq 2B \leq 42$なので，$0 \leq x_1 \leq 2B$となる。

②$14 \leq B \leq 21$のケース：$0 \leq 2B - 28 \leq 2B \leq 42$なので，$2B - 28 \leq x_1 \leq 2B$となる。

③$21 \leq B \leq 35$のケース：$0 \leq 2B - 28 \leq 42 \leq 2B$なので，$2B - 28 \leq x_1 \leq 42$となる。

しかし，Pはx_1の増加関数なので，①と②をまとめて$0 \leq B \leq 21$とすれば，この範囲では$\max\{2B - 28, 0\} \leq x_1 \leq 2B$となる。

同様に，$0 \leq z_2 \leq 42$の条件から$3E - 25.2 \leq x_2 \leq 3E$が成立しなければならないので，$E$に関しても$0 \leq E \leq 8.4$，$8.4 \leq E \leq 14$，$14 \leq E \leq 22.4$の3つのケースに分けて考えればよい。

④$0 \leq E \leq 8.4$のケース：$3E - 25.2 \leq 0 \leq 3E \leq 42$なので，$0 \leq x_2 \leq 3E$となる。

⑤$8.4 \leq E \leq 14$のケース：$0 \leq 3E - 25.2 \leq 3E \leq 42$なので，$3E - 25.2 \leq x_2 \leq 3E$となる。

⑥$14 \leq E \leq 22.4$のケース：$0 \leq 3E - 25.2 \leq 42 \leq 3E$なので，$3E - 25.2 \leq x_2 \leq 42$となる。

上と全く同様に，Pはx_2の増加関数でもあるので，④と⑤をまとめて$0 \leq E \leq 14$とすれば，この範囲では$\max\{3E - 25.2, 0\} \leq x_2 \leq 3E$となる。

【ケース1： $0 \leq B \leq 21$，$0 \leq E \leq 14$】

図V–2から明らかなように，$2B$の値が$(2B)_1$で$2B + 3E \leq 42$のときには最適解は①であり，$2B$の値が$(2B)_2$で$2B + 3E \geq 42$のときには最適解は②である。①では$x_1 = 2B$，$x_2 = 3E$であり，このときには$2B + 3E + 10P = 126$が成立する。②では$x_2 = 3E$，$x_1 = 42 - 3E$であり，このときには$6B + 9E + 20P = 294$が成立する。

【ケース2： $0 \leq B \leq 21$，$14 \leq E \leq 22.4$】

図V–3から明らかなように，$2B$の値が$(2B)_1$であろうが$(2B)_2$であろうが，最適解は③である。③では$x_2 = 3E$，$x_1 = 0$であり，このときには$3B + 5E + 10P = 154$が成立する。

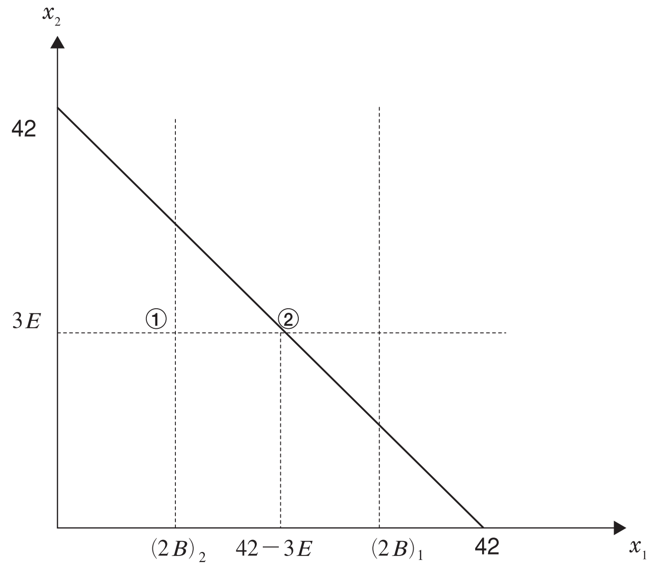


図 V-2

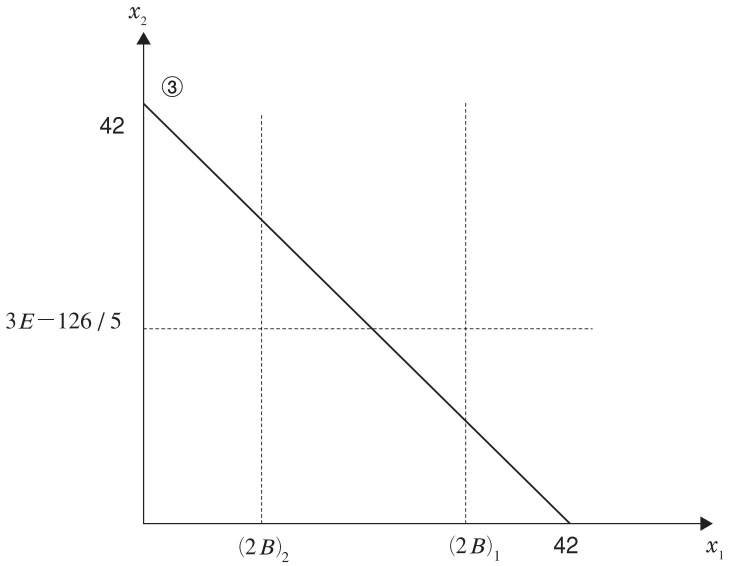


図 V-3

【ケース 3： $21 \leq B \leq 35$, $0 \leq E \leq 14$】

図V–4から明らかなように，$2B - 28$の値が$(2B - 28)_1$で$2B + 3E \geq 70$のときには最適解は④であり，$2B - 28$の値が$(2B - 28)_2$で$2B + 3E \leq 70$のときには最適解は②である。④では, $x_1 = 2B - 28$, $x_2 = 70 - 2B$であり, このときには$10B + 15E + 30P = 476$が成立する。

生産可能性曲面の図示

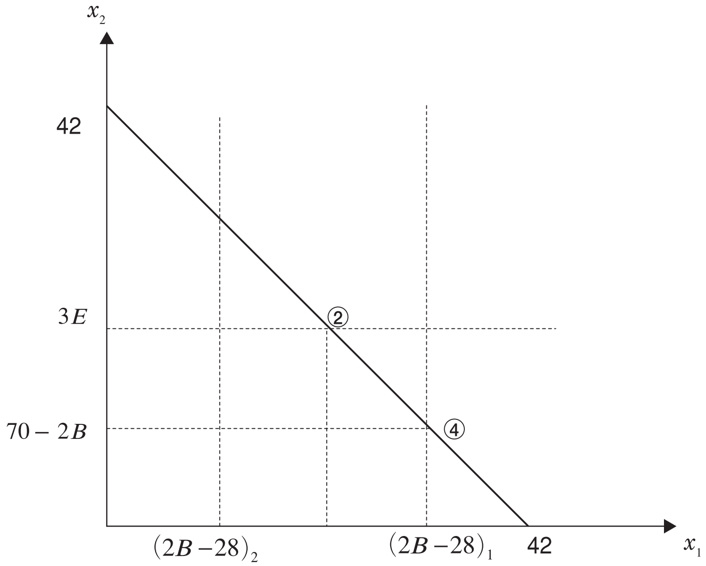


図 V–4

【ケース 4： $21 \leq B \leq 35$，$14 \leq E \leq 22.4$】

図V–5から明らかなように，$2B-28$ の値が $(2B-28)_1$ で $2B+3E \geq 70+(126/5)$ のときには解は存在せず，$2B-28$ の値が $(2B-28)_2$ で $2B+3E \leq 70+(126/5)$ のときには最適解は④である。

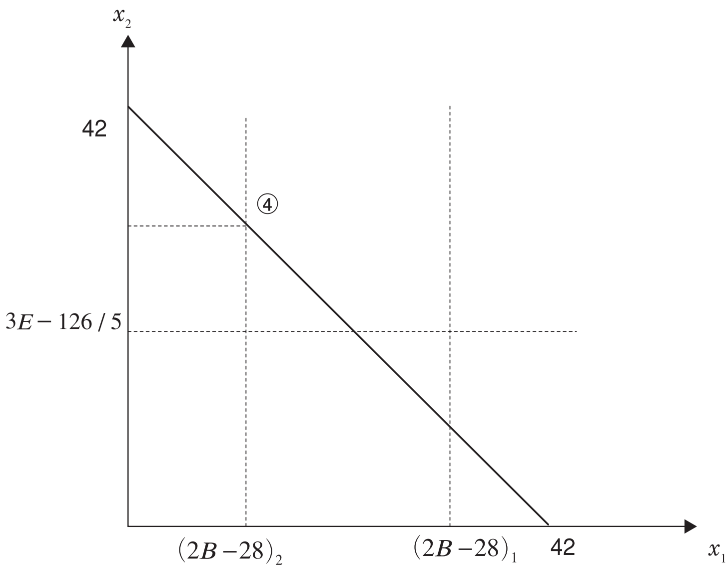


図 V–5

【ケース 5： $0 \leq B \leq 21$，$22.4 \leq E \leq 28.4$】

このケースからは，鶏卵か牛肉かに比較劣位を持つ生産者も生産しなければならないので，$y_2 = 0$ と $z_1 = 0$ と想定することはできない。しかし効率的な生産のためには，ジャガイモの生産に比較劣位を持つ牛飼いに牛肉か鶏卵の生産に特化させればよい。したがって，農夫が牛肉を B だけ生産し，牛飼いと養鶏業者は42時間をすべて鶏卵の生産にあて，彼ら2人が生産し残した鶏卵を農夫が生産する，つまり，$x_1 = 0$，$x_2 = 42$，$z_1 = 0$，$x_2 = 42$，$y_1 = 3B$，$y_2 = 7(E - 22.4)$ が最適な生産パターンである。このとき，$15B + 35E + 50P = 994$ が成立する。

【ケース 6： $35 \leq B \leq 45.5$，$0 \leq E \leq 14$】

牛飼いと農夫は42時間を牛肉の生産にあて，養鶏業者は鶏卵を E だけ生産し，残りの時間を牛肉の生産にあてる，つまり，$x_1 = 42$，$x_2 = 0$，$y_1 = 42$，$y_2 = 0$，$z_2 = 5E$，$z_1 = 4(B - 35)$ が最適な生産パターンである。このとき，$4B + 5E + 10P = 182$ が成立する。

付録 VI：【ケース 3 とケース 4：$2B + 3E \geq 70$ のケース】

(1) このケースでの効率的な生産パターンは，本文で示した次のパターンである：農夫は42時間を牛肉生産に使い切る；牛飼いは農夫が生産し残した牛肉を生産して，残りの時間を鶏卵の生産にあてる；養鶏業者は牛飼いが生産し残した鶏卵を生産する。つまり，$y_1 = 42$，$x_1 = 2(B - 14)$，$x_2 = 42 - 2(B - 14)$，$z_2 = 5\{E - (1/3)[42 - 2(B - 14)]\}$，$z_1 = 0$，$y_2 = 0$ が効率的な生産パターンである。このときには，次が成立する：

$$10B + 15E + 30P = 476$$

(2) 牛飼いが鶏卵を E だけ生産して，残りの時間を牛肉の生産にあて，農夫は牛飼いが生産し残した牛肉を生産するとしてみよう。この場合には，$70 \leq 2B + 3E$ なので，農夫は42時間を使っても牛飼いが生産し残した牛肉を生産しきれないので，その残された牛肉を，牛肉生産に比較劣位を持つ養鶏業者が生産しなければならない。この場合には，$z_1 = 4\{B - (1/2)(42 - 3E) - 14\}$ であるが，$4\{B - (1/2)(42 - 3E) - 14\} \geq 42$ が成立するので，生産者3人で与えられたを生産することは不可能である。

(3) 牛飼いが牛肉を B だけ生産し残された時間を鶏卵の生産にあて，養鶏業者は牛飼いが生産し残した鶏卵を生産するとしてみよう。この場合には，$x_1 = 2B$，$x_2 = 42 - 2B$ なので，$z_2 = 5\{E - (1/3)(42 - 2B)\}$ となる。

①もし $5\{E - (1/3)(42 - 2B)\} \geq 42$ であれば，養鶏業者は42時間を使っても，牛飼いが生産し残した　鶏卵を生産することができない。したがって，その残りを鶏卵生産に比較劣位を

持つ農夫が生産しなければならない。この場合には，$y_2 = 7\{E - (1/3)(42 - 2B) - 8.4\}$となるが，$7\{E - (1/3)(42 - 2B) - 8.4\} \geq 42$となるので，生産者3人で与えられた$E$を生産できない。

②もし$5\{E - (1/3)(42 - 2B)\} \leq 42$であれば，牛飼いと農夫で与えられた$E$を生産できる。このときには，$10P = \{42 - 2B - (42 - 2B)\} - (42 - 0 - 0) + \{42 - 0 - 5[E - (1/3)(42 - 2B)]\}$となるので，次が成立する：

$$10B + 15E + 10P = 336$$

しかし，この場合のジャガイモの生産高は$(1/10)(336 - 10B - 15E)$であるが，これは効率的な生産パターンのときの生産高より小さい。

(4) 養鶏業者が42時間使って鶏卵を生産し，牛飼いは養鶏業者が生産し残した鶏卵を生産し，残された時間を牛肉の生産にあて，農夫は牛飼いが生産し残した牛肉を生産するとしてみよう。この場合には，$z_2 = 42$，$x_2 = 3(E - 8.2)$，$x_1 = 42 - 3(E - 8.5)$，$y_1 = 3\{B - (1/2)[42 - 3(E - 8.4)]\}$であるが，$3\{B - (1/2)[42 - 3(E - 8.4)]\} \geq 42$となるので，生産者3人で与えられた$B$を生産することが不可能である。

注 ——————————

1) 決められた時間内に3種類の生産物を生産する場合，任意の2種類の生産に当てる時間が分かればよいので，1人の生産者が決めなければならない変数は2つ，したがって，生産者が3人であれば，6つの変数の値を決めなければならない。しかし，2種類の生産物の産出量が与えられれば，その制約条件から変数を2つ減らすことができるので，決定すべき変数の数は$6 - 2 = 4$つある。

2) マンキュー（2005），p.70。ここの数値例はマンキュー『マンキュー経済学II　マクロ編』の第1版にあったものを，グラフがあまりにもいびつになるので数字を1つだけ変更したものであるが，本質は第2版の数値例と同じである。

3) (x,y)平面で考えると，問題(1)の目的関数は$y = -(5/4)x + 90 - 5P$なので傾きが$-5/4$の直線であり，制約条件式も$y = -10x + 20B$なので傾きが-10の直線である。このように，目的関数も制約条件も直線（線型関数）になっている最適化問題を，線型計画（linear programming, LP）問題という。

4) マンキュー（2005），p.76。

5) マンキュー（2005），p.77。

6) マンキュー（2005），p.75。

7) かりにジャガイモを10kg生産するとき，線分A_1A_2から決まる牛肉の生産高は$B + 2P = 36$より16kgである。しかし，ジャガイモを10kg生産するとき点A_4では牛肉2kgしか生産できないので，点A_4は効率的でないことが分かる。

8) 比較はpair-wiseなので，正確には次のように言うべきである：農夫と比較しても養鶏業者と比較しても，牛飼いは牛肉生産に比較優位を持っていて，牛飼いと比較しても養鶏業者と比較して

も，農夫はジャガイモ生産に比較優位を持っている。この点は東京経済大学・志築徹朗教授に教えて頂いた。感謝申し上げる。

9)　正確に言えば，次のようになる：牛飼いの牛肉生産の機会費用はジャガイモで測っても鶏卵生産で測っても農夫の牛肉生産の機会費用より小さいので，牛飼いは牛肉生産に比較優位を持っている。同様に，農夫の鶏卵生産の機会費用は牛肉で測ってもジャガイモで測っても牛飼いの鶏卵生産の機会費用より小さいので，農夫は鶏卵生産に比較優位を持っている。

10)　いま，牛肉と鶏卵の生産高 (B, E) が与えられている。牛飼いが牛肉を B だけ生産すれば、彼に残された時間は $(40-2B)$ である。この時間で農夫が生産し残した鶏卵 $(E-4)$ を生産できなければ，つまり，$20(E-4) \leq 40-2B$ でなければ，与えられた (B, E) を牛飼いと農夫の 2 人で生産する事は不可能である。したがって，与えられた (B, E) は $2B+20(E-4) \leq 40$ をみたさなければならない。

11)　与えられた (B, E) は，$40 \geq 20(B-20)+10E$ をみたさなければならない。

12)　四辺形 $A_2A_6A_5A_4$ は、$\Delta D_1A_2A_4$ と $\Delta D_4A_6A_5$ が合同かつ平行で，同様に，$\Delta A_2D_2A_6$ と $\Delta A_4D_3A_5$ も合同かつ平行なので，平行四辺形である。

13)　端点 $A_1 \sim A_6$ の任意の 3 点を結んでできる平面のもっとも外側の平面を凸包（convex hull）というが，生産可能性曲面はその凸包になるのである。

14)　3 次元空間の 3 点 (x_1, y_1, z_1)，(x_2, y_2, z_2)，(x_3, y_3, z_3) を通る平面の方程式 $ax+by+cz=d$ は，次の連立方程式から係数 (a, b, c, d) の値を求めればよい：

$$\begin{cases} ax_1+by_1+cz_1=d \\ ax_2+by_2+cz_2=d \\ ax_3+by_3+cz_3=d \end{cases}$$

15)　脚注 13 にあるように，生産可能性局面は 3 つの端点を結んで出来る三角形の最も外側から構成されるので，著者は生産可能性曲面が平行四辺形を含むことを予想していなかった。

16)　同様に，農夫は牛肉生産に比較劣位を持っている。

17)　農夫と養鶏業者の 2 人の生産者と，ジャガイモと鶏卵という 2 種類の生産物からなる経済を考えると，農夫はジャガイモの生産に，養鶏業者は鶏卵の生産に比較優位を持っている。そこに，牛飼いという第 3 番目の生産者と，牛肉という第 3 番目の生産物が加わったとすると，牛飼いは牛肉生産に絶対優位を持っているので，牛飼いは牛肉生産に，農夫はジャガイモ生産に，養鶏業者は鶏卵生産に特化することが, 社会全体で見て効率的と考えられる。しかし, この完全特化の点は, 脚注 6 に示されているように，生産可能性曲面の上に乗っていない。

18)　実現が予想された完全特化の点は，$(B, E, P)=(21,\ 8.4,\ 4.2)$ であった。$(E, P)=(8.4,\ 4.2)$ は線分 A_5A_{10} を $E-P$ 平面に射影した線分上にあり，線分 A_5A_{10} の式は，平行四辺形 $A_5A_{10}A_9A_6$ と平行四辺形 $A_2A_3A_{10}A_5$ の式から P 消去することで，$2B+3E=70$ と求められる。この式に $B=21$ を代入すると，$E=28/3$ が得られるが，$28/3 > 8.4$ なので，$(B, E, P)=(21,\ 8.4,\ 4.2)$ は生産可能性曲面の内側に存在していることが分かる。

19)　$\max\{a,b\}$ は, a と b の大きい方を値とする関数である。つまり, $a \geq b$ のときは $\max\{a,b\}=a$ であり, $a \leq b$ のときは $\max\{a,b\}=b$ である。

生産可能性曲面の図示

参 考 文 献

[1] N.G. マンキュー(足立英之その他訳)『マンキュー経済学 II マクロ編(第 2 版)』(東洋経済新報社, 2005 年)。

[2] Jones, R.W., "Comparative Advantage and the Theory of Tariffs : A Multi-Country, Multi-Commmodity Model," *Review of Economic Studeies*, 29, (June, 1961).