

収穫逓増下のコブ＝ダグラス生産関数の 集計について

浜野 忠司

1. はじめに

個別生産集合が凸であれば、各企業が選択する生産プランが生産集合の境界上にある限り、それらの合計は常に集計的生産集合の境界上にとどまる¹⁾。この性質は、企業の行動原理が利潤最大化か否かには依存しない。つまり、凸環境のもとでは、分権的な意思決定が個別の生産の効率性を満たしていれば、自動的に経済全体の生産の効率性を満たすのである。

しかし、収穫逓増もしくはより一般的な非凸環境のもとでは、状況が一変する。Beato-Mas-Collel (1985) は、非凸環境のもとでの限界費用価格規制均衡 (marginal cost pricing equilibrium) を分析する際に想定されていた仮定、すなわち、個別企業の生産集合の境界上の生産プランの合計が集計的生産集合の境界上にあるという仮定が、全くナンセンスであることを、2企業・1投入財・1生産物の例で明らかにした。つまり、非凸環境のもとでは、個別企業による分権的意思決定は、たとえ個別企業の生産の効率性を満たしていても、経済全体の生産の効率性を満たさない場合がある。このような場合、集計的生産集合もしくは集計的生産関数はどのような形状を有するのであろうか。

その手がかりとなるのが、自然独占の理論であらう²⁾。自然独占の理論によれば、すべての企業が同一の費用関数をもつ場合、費用関数の劣加法性は、独占による生産の効率性、すなわち自然独占を意味する。この場合、所与の生産量を1企業だけで生産するときの費用は、複数の企業が同時に稼働して少しずつ生産するときの合計の費用よりも少ないことを意味する。同様に、生産技術がすべての企業に共通の生産関数で表現される場合には、生産関数の優加法性が、独占による生産の効率性を意味する。そして、この場合の集計的生産関数は、共通の生産関数そのものである。このように、自然独占の理論はすべての企業の生産技術が同一であるということ想定している。

しかし、生産技術が企業間で異なる場合には、生産関数の優加法性だけではこのような独占による生産の効率性を達成できないことが知られている。このような条件のもと、集計的生産関数の形状について分析したのが、Hamano (1996) である。彼は、一般的な枠組みにおいて、独占による生産の効率性を保証する十分条件を提示した。その十分条件とは、“一般化された”平均生産性がすべての技術において非逓減である、というものである。この条件のもと、独占

による生産が最も効率的となる。そして、各投入財ベクトルのもとで最も効率的となる企業の生産量が、集計的生产関数の値となる。さらに、この結果の帰結として、コブ=ダグラス生産関数³⁾に関する条件を導き出している。

いうまでもなく、集計的生产関数⁴⁾は、所与の投入財ベクトルと、それを複数の生産関数に配分したときの生産量の合計の最大値との間の関係を表している。したがって、集計的生产関数の導出は、最大化問題として捉えることができる。そして、独占による生産が効率的であるという状況は、最大化問題の端点解（コーナー・ソリューション）に他ならない。さて、収穫逡増下では生産関数が凹関数とはならないので、凸環境のもとでの最大化の手法が利用できない。このような状況において、Hamano (1996) は、この端点解が成立するための条件を、平均生産性を比較することにより代数的に導出した。しかし、解析的に考えるならば、端点解を得るためには、必ずしも凹関数等の条件は必要ない。例えば、最大化のための二階の条件が、いたるところ成立しない、もしくは一階の条件を満たす点で成立しなければ、内点解は排除され、端点解が保証される。Hamano (2011) は、コブ=ダグラス生産関数で表現された2生産技術・2投入財・1生産物の枠組みで、最大化のための二階の条件の吟味から集計的生产関数の問題を考察し、独占による生産が効率的となる条件を導出した。しかし、同様の枠組みに限定して、Hamano (1996) と Hamano (2011) を比較したとしても、どちらか一方が他方を意味するわけではないことが、Hamano (2011) で報告されている。

本稿の目的は、収穫逡増のもと、コブ=ダグラス生産関数で表現された2生産技術・2投入財・1生産物の枠組みにおいて、Hamano (2011) と Hamano (1996) の両方を含むような形の条件を導くことである。そのために、最大化のための二階の条件を吟味して、独占による効率性を保証する条件を考察する。さて、Hamano (2011) と本稿は、ともに最大化のための二階の条件の吟味を行っている。両者の差は、前者のモデルが2つのコブ=ダグラス生産関数が対称のケース⁵⁾に限定した分析であるのに対して、本稿は非対称も含むケースに拡張している、という点である。

本稿の構成は以下の通りである。まず、次節では、一般的な枠組み、すなわち、2種類以上の生産技術（企業）、2種類以上の投入財そして1種類の生産物が存在するモデルに対して、関連する基本概念を定義する。また、Hamano (1996) と Hamano (2011) の結果を要約する。そして、2生産技術・2投入財・1生産物の枠組みに限定して、最大化のための二階の条件から導かれる主要結果を提示する。これらの証明は、第3節において与えられる。最後に、第4節では、われわれの結果の問題点をまとめ、将来の課題について述べる。

2. モデルと主要結果

2.1 独占による生産の効率性

H 種類の生産技術 (あるいはそれを利用する企業), n 種類の投入財, そして 1 種類の生産物が存在する経済を考える。第 h 番目の生産技術 ($h=1, 2, \dots, H$) は生産関数 $f^h: R^n \rightarrow R$ で表現されるものとする。すなわち, $f^h(x)$ は, 所与の投入財の組合せ $x \in R^n$ のもとで生産可能な生産量の最大値を表す。生産関数に関して, 次の条件を仮定する。

仮定 2.1 すべての $h=1, 2, \dots, H$ に関して, 生産関数 f^h は単調非減少かつ $f^h(0)=0$ である。

次に, 個別生産関数が与えられたとき, それを集計した集計的生産関数の定義を述べておく。

定義 2.2 個別の生産関数 $f^h (h=1, 2, \dots, H)$ が与えられたとき, 集計的生産関数 $AF: R^n \rightarrow R_+$ は次のように定義される。

$$AF(x) \equiv \max_{\substack{x = \sum_{h=1}^H x^h \\ x^h \in R^n (h=1, 2, \dots, H)}} \left[\sum_{h=1}^H f^h(x^h) \right]. \quad (1)$$

つまり, 集計的生産関数 AF は, 所与の投入財ベクトルを複数の技術に振り分けて生産したときに得られる最大生産量を表す。

ここで, 生産関数が収穫通増の性質を持つための十分条件である優加法性を定義しておこう⁶⁾。

定義 2.3 関数 $f: R^n \rightarrow R_+$ は, 任意の $x, x' \in R^n$ に対して次の条件を満たすとき, 優加的 (superadditive) であるという。

$$f(x+x') \geq f(x) + f(x').$$

もし, すべての企業が共通の生産技術を保有する場合, 生産関数の優加法性は, 独占による生産の効率性を意味する。すなわち, 経済で利用可能な投入財を 1 企業に集中させて生産することは, それらの投入財を複数の企業に配分して, さまざまな企業が同時に生産することよりも効率的であることを意味する。このような場合, 集計的生産関数は, 共通の生産技術そのものである。

しかし, 生産技術が企業間で異なる場合には, 生産関数の優加法性だけではこのような独占による生産の効率性を達成できないことが知られている⁷⁾。このような条件のもと, 集計的生産関数の形状がどのようになるかについては, 余り知られていない。その例外が, 独占による

収穫逓増下のコブ=ダグラス生産関数の集計について

生産の効率性を保証する十分条件を提示した Hamano (1996) である⁸⁾。そこで導かれた結果は次のようなものである。

命題 2.4 [Hamano (1996, Theorem 1)]

個別生産関数 $f^h: R_+^n \rightarrow R_+$ ($h=1, 2, \dots, H$) に対して, 次の条件を満たす関数 $g: R_+^n \rightarrow R_+$ が存在すると仮定する。

(C-1) すべての $x \in \{x \in R_+^n : f^h(x) > 0 \text{ for some } h\}$ に対して, $g(x) > 0$ である。

(C-2) すべての h と任意の $x', x'' \in \{x \in R_+^n : f^h(x) > 0 \text{ for some } h\}$ に対して,

$$\frac{f^h(x' + x'')}{g(x' + x'')} \geq \frac{f^h(x')}{g(x')} \quad (2)$$

が成立する。

このとき, 任意の $x^h \in R_+^n$ ($h=1, 2, \dots, H$) に対して, 次の関係が成立する。

$$\max \left[f^1 \left(\sum_{h=1}^H x^h \right), f^2 \left(\sum_{h=1}^H x^h \right), \dots, f^H \left(\sum_{h=1}^H x^h \right) \right] \geq \sum_{h=1}^H f^h(x^h). \quad (3)$$

この命題を簡単に説明しよう。まず, 投入財が1種類で, かつ関数 $f^h(x)$ が任意の $\alpha > 1$ に対して $f^h(\alpha x) > \alpha f^h(x)$ であれば, $g(x) = x$ とすることで, 明らかに条件 (C-1) と (C-2) を満たす。このとき, 式 (2) は投入財の平均生産性が非逓減であることを意味する。そして, 投入財が2種類以上の場合, 関数 g を投入財ベクトル x をスカラーに集計する関数とみなせば, $f^h(x)/g(x)$ は投入財の“一般化された”平均生産性 (generalized average productivity) と解釈できる。したがって, 式 (2) は, 投入財の投入量が増えるときに“一般化された”平均生産性が下落することはない, ということの意味する。

この命題は次のような意味を持っている。“一般化された”平均生産性がすべての技術において非逓減であれば, 投入財ベクトル x をどのように分割して複数の技術に振り分けて生産したとしても, x のもとでもっとも効率的な技術を使って生産した方がより多くの生産物を生産できる。すなわち, 条件 (C-1) と (C-2) が満たされるとき, 複数の収穫逓増技術のもとでの集計的生産関数 AF は,

$$AF(x) = \max [f^1(x), f^2(x), \dots, f^H(x)] \quad (4)$$

となる。

さらに, 命題 2.4 をコブ=ダグラス型の生産関数に応用することで, 次の結果が導かれている。

系 2.5 [Hamano (1996, Example 3)]

任意の $h (= 1, 2, \dots, H)$ に対して, 生産関数 $f^h(x)$ が

$$f^h(x) = A_h \times x_1^{\alpha_1^h} \times x_2^{\alpha_2^h} \times \cdots \times x_n^{\alpha_n^h}$$

というコブ＝ダグラス型で表現されるとする。このとき、もし条件 $\sum_{k=1}^n \min_h \{\alpha_k^h\} \geq 1$ が成立すれば、すべての $x \in R_+^n$ に対して、

$$AF(x) = \max [f^1(x), f^2(x), \dots, f^H(x)]$$

が成立する。

コブ＝ダグラス型生産関数の指数 α_k^h が、その投入財 k の産出弾力性 (output elasticity of input) をあらわすことに注意すれば、条件 $\sum_{k=1}^n \min_h \{\alpha_k^h\} \geq 1$ は、各投入財 k に関して最も小さな産出弾力性 $\min_h \{\alpha_k^h\}$ を取り出して、新たにコブ＝ダグラス生産関数

$$x_1^{\min_h (\alpha_1^h)} \times x_2^{\min_h (\alpha_2^h)} \times \cdots \times x_n^{\min_h (\alpha_n^h)}$$

を作ったとき、規模に関して収穫非逓増となることを意味する。

このように、Hamano (1996) は非常に一般的な枠組みで独占が効率的となる場合の条件を導出した。しかし、Hamano (2011) は、2 生産技術・2 投入財のケースにおいて、系 2.5 を応用できない例を報告している。それは、 $x = (x_1, x_2) \in R_+^2$ とするとき、次のような 2 つの生産関数である。

$$\begin{aligned} f^1(x) &= x_1 x_2^{0.34}, \\ f^2(x) &= x_1^{0.34} x_2. \end{aligned}$$

この場合、 $\min (\alpha_1^1, \alpha_1^2) + \min (\alpha_2^1, \alpha_2^2) = 0.34 + 0.34 < 1$ となり、系 2.5 の条件を満たさないため、 $AF(x) = \max [f^1(x), f^2(x)]$ となるか否かは不明である。この点を明らかにしたのが、Hamano (2011) である。すなわち、2 生産技術および 2 投入財のケースでかつ、生産関数が一般化されたコブ＝ダグラス型で表現されるという、きわめて限定的なモデルながら、上記のような生産技術に対しても、独占による生産が効率的となることが示されている。

命題 2.6 [Hamano (2011)]

生産技術が 2 種類 ($H=2$) で、かつ投入財も 2 種類 ($n=2$) であるとする。さらに、2 種類の生産技術 $f^1(x)$ と $f^2(x)$ がそれぞれ次のようなコブ＝ダグラス型生産関数で表現されるとする。

$$\begin{aligned} f^1(x) &= A_1 x_1^{\alpha_1^1} x_2^{\alpha_2^1}, \\ f^2(x) &= A_2 x_1^{\alpha_1^2} x_2^{\alpha_2^2}. \end{aligned}$$

収穫増下のコブ=ダグラス生産関数の集計について

ここで、 α_1 および α_2 を次のように定義する。

$$\alpha_1 = \min(\alpha_1^1, \alpha_2^2), \quad (5)$$

$$\alpha_2 = \min(\alpha_2^1, \alpha_1^2). \quad (6)$$

もし $\alpha_1 + \alpha_2 < 4\alpha_1\alpha_2$ という条件が成立すれば、任意の $x \in R_+^2$ に対して、

$$AF(x) = \max[f^1(x), f^2(x)]$$

が成立する。

しかし、すでに Hamano (2011) が指摘しているように、2 生産技術・2 投入財というこの限定的な枠組みでも、命題 2.6 が Hamano (1996) の結果 (系 2.5) を意味するわけではない。その反例として提示されたのが、次の 2 つの生産技術である。

$$f^1(x) = x_1 x_2^{1/4},$$

$$f^2(x) = x_1^{3/4} x_2.$$

すなわち、 $\alpha_1 = \min(1, 1) = 1$ かつ $\alpha_2 = \min(1/4, 3/4) = 1/4$ となり、 $\alpha_1 + \alpha_2 < 4\alpha_1\alpha_2$ が満たされない。

次の小節では、Hamano (2011) と同様の枠組みにおいて、Hamano (1996) で得られた系 2.5 と同じ結果を導く。

2.2 主要結果

Hamano (2011) と同様の枠組みを考える。すなわち、次のような仮定において分析を進める。

仮定 2.7 生産技術の種類は 2 種類 ($H=2$) で、かつ投入財の種類も 2 種類 ($n=2$) であるとする。さらに、2 種類の生産技術 $f^1(x)$ と $f^2(x)$ がそれぞれ次のようなコブ=ダグラス型生産関数で表現されるとする。

$$f^1(x_1, x_2) = A_1 x_1^{\alpha_1^1} x_2^{\alpha_2^1},$$

$$f^2(x_1, x_2) = A_2 x_1^{\alpha_1^2} x_2^{\alpha_2^2}.$$

ただし、すべての $h(=1, 2)$ と $j(=1, 2)$ について $A_h, \alpha_h^j > 0$ である。また、任意の $h(=1, 2)$ に対して、 $\alpha_1^h + \alpha_2^h \geq 1$ が成立すると仮定する。

この枠組みのもと、われわれは、まず次の命題 2.8 を証明する。

命題 2.8 次のいずれかの条件が成立すると仮定する。

$$(i) (\alpha_1^1 - \alpha_1^2)(\alpha_2^1 - \alpha_2^2) \geq 0.$$

$$(ii) \alpha_1^1 = \alpha_2^2, \alpha_1^2 = \alpha_2^1 \quad \text{かつ} \quad \alpha_1^1 + \alpha_1^2 < 4\alpha_1^1\alpha_1^2.$$

このとき、任意の $(x_1, x_2) \in R_+^2$ に対して、次の関係が成立する。

$$AF(x_1, x_2) = \max [f^1(x_1, x_2), f^2(x_1, x_2)].$$

この命題の 2 つの条件について簡単に説明しておこう。まず (ii) の条件は Hamano (2011) で導かれた条件と全く同じである⁹⁾。そして、(i) の条件は、一方のコブ=ダグラス型生産関数の各投入財の産出弾力性が両方とも、もう一つの生産関数のそれよりも大きいことを意味する。この 2 つのいずれか一方が満たされれば、独占による生産が効率的となる、というのがこの命題の主張である。

上記の命題 2.8 を用いて、次の定理 2.9 を証明する。

定理 2.9 もし $\min(\alpha_1^1, \alpha_1^2) + \min(\alpha_2^1, \alpha_2^2) \geq 1$ という条件が満たされれば、任意の $(x_1, x_2) \in R_+^2$ に対して、次の関係が成立する。

$$AF(x_1, x_2) = \max [f^1(x_1, x_2), f^2(x_1, x_2)].$$

この定理は、Hamano (1996) で示された系 2.5 の内容を、2 生産技術・2 投入財の枠組みに置き換えたものと同じである。

3. 証明

3.1 命題 2.8 の証明

命題 2.8 の結論である

$$AF(x_1, x_2) = \max [f^1(x_1, x_2), f^2(x_1, x_2)]$$

を示すためには、所与の投入財ベクトル $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in R_{++}^2$ に対して、2 つの技術にそれらをどのように配分しても、どちらか一つの技術だけを用いて生産する場合の生産量を上回ることができないことを示せばよい。すなわち、任意の $(x_1, x_2) \in [0, \bar{x}_1] \times [0, \bar{x}_2]$ に対して、

$$f^1(x_1, x_2) + f^2(\bar{x}_1 - x_1, \bar{x}_2 - x_2) \leq \max [f^1(\bar{x}_1, \bar{x}_2), f^2(\bar{x}_1, \bar{x}_2)] \quad (7)$$

となることを示せばよい。ただし、 $[a, b]$ は R における閉区間を表す。そこで、所与の投入財

収穫増下のコブ=ダグラス生産関数の集計について

ベクトル $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in R_+^2$ に対して、関数 $F: [0, \bar{x}_1] \times [0, \bar{x}_2] \rightarrow R$ を次のように定義する。

$$F(x_1, x_2) = A_1 x_1^{\alpha_1^1} x_2^{\alpha_2^1} + A_2 (\bar{x}_1 - x_1)^{\alpha_1^2} (\bar{x}_2 - x_2)^{\alpha_2^2}. \quad (8)$$

いま、 $(x_1^*, x_2^*) \in [0, \bar{x}_1] \times [0, \bar{x}_2]$ において、 $F(x_1, x_2)$ が最大になるとしよう。もし、 (x_1^*, x_2^*) が内点解でなければ、明らかに $(x_1^*, x_2^*) = (0, 0)$ あるいは $(x_1^*, x_2^*) = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ となり、不等式 (7) の成立を意味する。したがって、 (x_1^*, x_2^*) が内点解でないことを示せば十分である。そのためには、 $F(x_1, x_2)$ の最大化のための一階の条件を満たす点において、最大化のための二階の条件が成立しないことを示せばよい。いま、最大化のための一階の条件を満たす内点を (\hat{x}_1, \hat{x}_2) とする。このとき、次の関係を示せば十分である。

$$F_{x_1 x_1}(\hat{x}_1, \hat{x}_2) F_{x_2 x_2}(\hat{x}_1, \hat{x}_2) - (F_{x_1 x_2}(\hat{x}_1, \hat{x}_2))^2 < 0. \quad (9)$$

まず、関数 $F(x_1, x_2)$ の一階の偏導関数を求めると次のようになる。

$$F_{x_1}(x_1, x_2) = \frac{\partial F(x_1, x_2)}{\partial x_1} = A_1 \alpha_1^1 x_1^{\alpha_1^1 - 1} x_2^{\alpha_2^1} - A_2 \alpha_1^2 (\bar{x}_1 - x_1)^{\alpha_1^2 - 1} (\bar{x}_2 - x_2)^{\alpha_2^2},$$

$$F_{x_2}(x_1, x_2) = \frac{\partial F(x_1, x_2)}{\partial x_2} = A_1 \alpha_2^1 x_1^{\alpha_1^1} x_2^{\alpha_2^1 - 1} - A_2 \alpha_2^2 (\bar{x}_1 - x_1)^{\alpha_1^2} (\bar{x}_2 - x_2)^{\alpha_2^2 - 1}.$$

したがって、関数 $F(x_1, x_2)$ の最大化のための一階の条件は、

$$A_1 \alpha_1^1 \hat{x}_2^{\alpha_2^1 - 1} \hat{x}_2^{\alpha_2^1} = A_2 \alpha_1^2 (\bar{x}_1 - \hat{x}_1)^{\alpha_1^2 - 1} (\bar{x}_2 - \hat{x}_2)^{\alpha_2^2}, \quad (10)$$

$$A_1 \alpha_2^1 \hat{x}_2^{\alpha_2^1 - 1} \hat{x}_2^{\alpha_2^1 - 1} = A_2 \alpha_2^2 (\bar{x}_1 - \hat{x}_1)^{\alpha_1^2} (\bar{x}_2 - \hat{x}_2)^{\alpha_2^2 - 1}, \quad (11)$$

となるので、

$$\frac{\alpha_1^1}{\hat{x}_1} = \frac{\alpha_1^2}{\bar{x}_1 - \hat{x}_1},$$

$$\frac{\alpha_2^1}{\hat{x}_2} = \frac{\alpha_2^2}{\bar{x}_2 - \hat{x}_2},$$

を得る。これより、最大化のための一階の条件を満たす \hat{x}_1 と \hat{x}_2 の間には、次の関係が成立する。

$$\frac{\hat{x}_2}{\bar{x}_2} = \frac{\alpha_1^2 \alpha_2^1 \left(\frac{\hat{x}_1}{\bar{x}_1} \right)}{\alpha_1^1 \alpha_2^2 + (\alpha_1^2 \alpha_2^1 - \alpha_1^1 \alpha_2^2) \left(\frac{\hat{x}_1}{\bar{x}_1} \right)}. \quad (12)$$

次に、関数 $F(x_1, x_2)$ の二階の偏導関数は

$$F_{x_1x_1}(x_1, x_2) = A_1\alpha_1^1(\alpha_1^1-1)x_1^{\alpha_1^1-2}x_2^{\alpha_1^1} + A_2\alpha_1^2(\alpha_1^2-1)(\bar{x}_1-x_1)^{\alpha_1^2-2}(\bar{x}_2-x_2)^{\alpha_1^2}, \quad (13)$$

$$F_{x_2x_2}(x_1, x_2) = A_1\alpha_2^1(\alpha_2^1-1)x_1^{\alpha_2^1}x_2^{\alpha_2^1-2} + A_2\alpha_2^2(\alpha_2^2-1)(\bar{x}_1-x_1)^{\alpha_2^2}(\bar{x}_2-x_2)^{\alpha_2^2-2}, \quad (14)$$

$$F_{x_1x_2}(x_1, x_2) = A_1\alpha_1^1\alpha_2^1x_1^{\alpha_1^1-1}x_2^{\alpha_2^1-1} + A_2\alpha_1^2\alpha_2^2(\bar{x}_1-x_1)^{\alpha_1^2-1}(\bar{x}_2-x_2)^{\alpha_2^2-1} \quad (15)$$

となる。

ところで、一階の条件 (10) を用いることで、式 (13) は次のように書き換えられる。

$$F_{x_1x_1}(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = A_1\alpha_1^1\hat{x}_1^{\alpha_1^1-2}\hat{x}_2^{\alpha_1^1}(\bar{x}_1-\hat{x}_1)^{-1}\{(\alpha_1^1-1)\bar{x}_1+(\alpha_1^2-\alpha_1^1)\hat{x}_1\}. \quad (16)$$

同様に、一階の条件 (11) によって、式 (14) を書き換えると、次のようになる。

$$F_{x_2x_2}(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = A_1\alpha_2^1\hat{x}_1^{\alpha_2^1}\hat{x}_2^{\alpha_2^1-2}(\bar{x}_2-\hat{x}_2)^{-1}\{(\alpha_2^2-1)\bar{x}_2+(\alpha_2^2-\alpha_2^1)\hat{x}_2\}. \quad (17)$$

次に、二階の偏導関数 $F_{x_1x_2}(x_1, x_2)$ を示す式 (15) に関しては、以下にみるように 2 通りの表現が可能である。まず、式 (10) を用いることで、式 (15) は次のように書き換えられる。

$$F_{x_1x_2}(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = A_1\alpha_1^1\hat{x}_1^{\alpha_1^1-1}\hat{x}_2^{\alpha_2^1-1}(\bar{x}_2-\hat{x}_2)^{-1}\{\alpha_2^1\bar{x}_2+(\alpha_2^2-\alpha_2^1)\hat{x}_2\}. \quad (18)$$

さらに、式 (11) を利用すれば、式 (15) は次のようになる。

$$F_{x_1x_2}(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = A_1\alpha_2^1\hat{x}_1^{\alpha_1^1-1}\hat{x}_2^{\alpha_2^1-1}(\bar{x}_1-\hat{x}_1)^{-1}\{\alpha_1^1\bar{x}_1+(\alpha_1^2-\alpha_1^1)\hat{x}_1\}. \quad (19)$$

さて、式 (16) - (19) と式 (12) を用いることで、以下のような関係が導かれる。

$$\begin{aligned} & F_{x_1x_1}(\hat{x}_1, \hat{x}_2)F_{x_2x_2}(\hat{x}_1, \hat{x}_2) - (F_{x_1x_2}(\hat{x}_1, \hat{x}_2))^2 \\ &= (A_1)^2\alpha_1^1\alpha_2^1\hat{x}_1^{2\alpha_1^1-2}\hat{x}_2^{2\alpha_2^1-2}\bar{x}_1\bar{x}_2(\bar{x}_1-\hat{x}_1)^{-1}(\bar{x}_2-\hat{x}_2)^{-1} \\ & \quad \times \left\{ (1-\alpha_1^1-\alpha_2^1) + (\alpha_1^1-\alpha_1^2)\frac{\hat{x}_1}{\bar{x}_1} + (\alpha_2^1-\alpha_2^2)\frac{\hat{x}_2}{\bar{x}_2} \right\}. \end{aligned} \quad (20)$$

まず、式 (20) の中括弧 $\{ \}$ の外の係数の符号は正であることに注意しよう。また、式 (20) の中括弧の中の式は、次のように表現することもできる。

$$\begin{aligned} & (1-\alpha_1^1-\alpha_2^1) + (\alpha_1^1-\alpha_1^2)\frac{\hat{x}_1}{\bar{x}_1} + (\alpha_2^1-\alpha_2^2)\frac{\hat{x}_2}{\bar{x}_2} \\ &= (1-\alpha_1^2-\alpha_2^2) + (\alpha_1^2-\alpha_1^1)\left(1-\frac{\hat{x}_1}{\bar{x}_1}\right) + (\alpha_2^2-\alpha_2^1)\left(1-\frac{\hat{x}_2}{\bar{x}_2}\right). \end{aligned} \quad (21)$$

したがって、 $0 < \hat{x}_1 < \bar{x}_1$ かつ $0 < \hat{x}_2 < \bar{x}_2$ であるから、 $(\alpha_1^1-\alpha_1^2)(\alpha_2^1-\alpha_2^2) > 0$ となれば、式 (20) の符号は負となる。

収穫増下のコブ=ダグラス生産関数の集計について

かりに, $(\alpha_1^1 - \alpha_1^2)(\alpha_2^1 - \alpha_2^2) = 0$ となる場合でも, $\alpha_1^1 - \alpha_1^2$ もしくは $\alpha_2^1 - \alpha_2^2$ の一方がゼロでなければ, やはり, 式 (20) の符号は負となる。

残る可能性は, $\alpha_1^1 = \alpha_1^2$, $\alpha_2^1 = \alpha_2^2$, そして $\alpha_1^1 + \alpha_2^1 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 1$ が同時に成立する場合である。このとき, 式 (20) の値はゼロとなる。したがって, 二階の条件の吟味だけでは不等式 (7) が成立するか否かは不明である。しかし, この不等式が成立することは, 以下のように直接確認される。

いま, $\alpha_1 = \alpha_1^1 = \alpha_1^2$ かつ $\alpha_2 = \alpha_2^1 = \alpha_2^2$ とおき, $F(x_1, x_2)$ を書き換えると,

$$F(x_1, x_2) = \bar{x}_1^{\alpha_1} \bar{x}_2^{\alpha_2} \left\{ A_1 \left(\frac{x_1}{\bar{x}_1} \right)^{\alpha_1} \left(\frac{x_2}{\bar{x}_2} \right)^{\alpha_2} + A_2 \left(1 - \frac{x_1}{\bar{x}_1} \right)^{\alpha_1} \left(1 - \frac{x_2}{\bar{x}_2} \right)^{\alpha_2} \right\} \quad (22)$$

となる。同様に, 式 (12) を書き換えると,

$$\frac{x_2}{\bar{x}_2} = \frac{\alpha_1 \alpha_2 \left(\frac{x_1}{\bar{x}_1} \right)}{\alpha_1 \alpha_2 + (\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_1 \alpha_2) \left(\frac{x_1}{\bar{x}_1} \right)} = \frac{x_1}{\bar{x}_1}$$

が導かれる。したがって, これより式 (22) は,

$$F\left(x_1, \frac{\bar{x}_2}{\bar{x}_1} x_1\right) = \bar{x}_1^{\alpha_1} \bar{x}_2^{\alpha_2} \left\{ A_1 \left(\frac{x_1}{\bar{x}_1} \right)^{\alpha_1 + \alpha_2} + A_2 \left(1 - \frac{x_1}{\bar{x}_1} \right)^{\alpha_1 + \alpha_2} \right\} \quad (23)$$

となる。これより, $F(x_1, x_2)$ を最大にする (x_1, x_2) は, A_1 と A_2 の大小関係に応じて次のように分類される。

$$\begin{cases} A_1 < A_2 & \text{ならば } (x_1, x_2) = (0, 0), \\ A_1 = A_2 & \text{ならば 任意の } x_1 \in [0, \bar{x}_1] \text{ に対して, } (x_1, x_2) = \left(x_1, \frac{\bar{x}_2}{\bar{x}_1} x_1 \right), \\ A_1 > A_2 & \text{ならば } (x_1, x_2) = (\bar{x}_1, \bar{x}_2). \end{cases}$$

したがって, $\alpha_1 = \alpha_1^1 = \alpha_1^2$ かつ $\alpha_2 = \alpha_2^1 = \alpha_2^2$ という条件のもとでも, 不等式 (7) が成立する。

最後に, Hamano (2011) と同様に, もし $\alpha_1^2 = \alpha_2^1$ かつ $\alpha_1^1 = \alpha_2^2$ とおき式 (12) を使って式 (20) を変形すれば, 条件 (ii) $\alpha_1^1 = \alpha_2^2$, $\alpha_1^2 = \alpha_2^1$ かつ $\alpha_1^1 + \alpha_2^2 < 4\alpha_1^1 \alpha_2^2$ のもとで, 式 (20) の符号が常に負となることが示される。

Q.E.D.

3.2 定理 2.9 の証明

命題 2.8 の証明で言及されているように, $AF(x_1, x_2) = \max [f^1(x_1, x_2), f^2(x_1, x_2)]$ を示すには, 任意の $(x_1, x_2) \in [0, \bar{x}_1] \times [0, \bar{x}_2]$ に対して,

$$f^1(x_1, x_2) + f^2(\bar{x}_1 - x_1, \bar{x}_2 - x_2) \leq \max [f^1(\bar{x}_1, \bar{x}_2), f^2(\bar{x}_1, \bar{x}_2)]$$

となることを示せばよい。これを、背理法により証明する。すなわち、定理の結論を否定し、次の条件を満たす $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in [0, \bar{x}_1] \times [0, \bar{x}_2]$ が存在すると仮定する。

$$A_1 \bar{x}_1^{\alpha_1^1} \bar{x}_2^{\alpha_2^1} + A_2 (\bar{x}_1 - \bar{x}_1)^{\alpha_1^2} (\bar{x}_2 - \bar{x}_2)^{\alpha_2^2} > \max (A_1 \bar{x}_1^{\alpha_1^1} \bar{x}_2^{\alpha_2^1}, A_2 \bar{x}_1^{\alpha_1^2} \bar{x}_2^{\alpha_2^2}). \quad (24)$$

いま、 $\bar{A}_1, \bar{A}_2 > 0$ を次のように定義する。

$$\bar{A}_1 = \frac{A_1 \bar{x}_1^{\alpha_1^1} \bar{x}_2^{\alpha_2^1}}{\bar{x}_1^{\min(\alpha_1^1, \alpha_1^2)} \bar{x}_2^{\alpha_2^1}} \quad (25)$$

$$\bar{A}_2 = \frac{A_2 (\bar{x}_1 - \bar{x}_1)^{\alpha_1^2} (\bar{x}_2 - \bar{x}_2)^{\alpha_2^2}}{(\bar{x}_1 - \bar{x}_1)^{\min(\alpha_1^1, \alpha_1^2)} (\bar{x}_2 - \bar{x}_2)^{\alpha_2^2}}. \quad (26)$$

さて定理の仮定より、 $\min(\alpha_1^1, \alpha_1^2) + \min(\alpha_2^1, \alpha_2^2) \geq 1$ であるから、 $\min(\alpha_1^1, \alpha_1^2) + \alpha_2^1 \geq 1$ および $\min(\alpha_1^1, \alpha_1^2) + \alpha_2^2 \geq 1$ を得る。ここで、次のような 2 つの生産関数 g^1 と g^2 を考えよう。

$$g^1(x_1, x_2) = \bar{A}_1 x_1^{\min(\alpha_1^1, \alpha_1^2)} x_2^{\alpha_2^1},$$

$$g^2(x_1, x_2) = \bar{A}_2 x_1^{\min(\alpha_1^1, \alpha_1^2)} x_2^{\alpha_2^2}.$$

この 2 つのコブ = ダグラス生産関数に対して、命題 2.8 を応用すれば、 α_2^1 と α_2^2 の大小関係にかかわらず、次の関係を得る。

$$\begin{aligned} \bar{A}_1 \bar{x}_1^{\min(\alpha_1^1, \alpha_1^2)} \bar{x}_2^{\alpha_2^1} + \bar{A}_2 (\bar{x}_1 - \bar{x}_1)^{\min(\alpha_1^1, \alpha_1^2)} (\bar{x}_2 - \bar{x}_2)^{\alpha_2^2} \\ \leq \max [\bar{A}_1 \bar{x}_1^{\min(\alpha_1^1, \alpha_1^2)} \bar{x}_2^{\alpha_2^1}, \bar{A}_2 \bar{x}_1^{\min(\alpha_1^1, \alpha_1^2)} \bar{x}_2^{\alpha_2^2}]. \end{aligned} \quad (27)$$

さらに、式 (25) と (26) より次の関係が導かれる。

$$\bar{A}_1 \bar{x}_1^{\min(\alpha_1^1, \alpha_1^2)} \bar{x}_2^{\alpha_2^1} = A_1 \bar{x}_1^{\alpha_1^1} \bar{x}_2^{\alpha_2^1}, \quad (28)$$

$$\bar{A}_2 (\bar{x}_1 - \bar{x}_1)^{\min(\alpha_1^1, \alpha_1^2)} (\bar{x}_2 - \bar{x}_2)^{\alpha_2^2} = A_2 (\bar{x}_1 - \bar{x}_1)^{\alpha_1^2} (\bar{x}_2 - \bar{x}_2)^{\alpha_2^2}. \quad (29)$$

ここでわれわれは、Hamano (2011) で示されている次の結果を、この関係に応用する。

補助定理 [Hamano (2011)]

$A_1, A_2 > 0, \alpha, \beta > 0, \alpha', \beta' \geq 0$ が与えられたとき、関数 k^1, k^2 を次のように定める。

$$k^1(x_1, x_2) = A_1 x_1^\alpha x_2^\beta,$$

$$k^2(x_1, x_2) = A_2 x_1^{\alpha+\alpha'} x_2^{\beta+\beta'}.$$

もし、ある (\bar{x}_1, \bar{x}_2) に対して、 $k^1(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = k^2(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ であれば、任意の $(x_1, x_2) \in R_+^2$ に対して、次の関係が成立する。

$$k^1(\bar{x}_1 + x_1, \bar{x}_2 + x_2) \leq k^2(\bar{x}_1 + x_1, \bar{x}_2 + x_2).$$

収穫増下のコブ=ダグラス生産関数の集計について

さて、 $\bar{x}_1 \leq \bar{x}_1$, $(\bar{x}_1 - \bar{x}_1) \leq \bar{x}_1$, $\bar{x}_2 \leq \bar{x}_2$, $(\bar{x}_2 - \bar{x}_2) \leq \bar{x}_2$ に注意して、この補助定理を等式 (28) と (29) に当てはめれば、次の関係が導かれる。

$$\bar{A}_1 \bar{x}_1^{\min(\alpha_1^1, \alpha_1^2)} \bar{x}_2^{\alpha_2^1} \leq A_1 \bar{x}_1^{\alpha_1^1} \bar{x}_2^{\alpha_2^1}, \quad (30)$$

$$\bar{A}_2 \bar{x}_1^{\min(\alpha_1^1, \alpha_1^2)} \bar{x}_2^{\alpha_2^2} \leq A_2 \bar{x}_1^{\alpha_1^2} \bar{x}_2^{\alpha_2^2}. \quad (31)$$

したがって、式 (27) ~ (31) より、次の関係を得る。

$$\begin{aligned} & A_1 \bar{x}_1^{\alpha_1^1} \bar{x}_2^{\alpha_2^1} + A_2 (\bar{x}_1 - \bar{x}_1)^{\alpha_1^2} (\bar{x}_2 - \bar{x}_2)^{\alpha_2^2} \\ &= \bar{A}_1 \bar{x}_1^{\min(\alpha_1^1, \alpha_1^2)} \bar{x}_2^{\alpha_2^1} + \bar{A}_2 (\bar{x}_1 - \bar{x}_1)^{\min(\alpha_1^1, \alpha_1^2)} (\bar{x}_2 - \bar{x}_2)^{\alpha_2^2} \\ &\leq \max(\bar{A}_1 \bar{x}_1^{\min(\alpha_1^1, \alpha_1^2)} \bar{x}_2^{\alpha_2^1}, \bar{A}_2 \bar{x}_1^{\min(\alpha_1^1, \alpha_1^2)} \bar{x}_2^{\alpha_2^2}) \\ &\leq \max(A_1 \bar{x}_1^{\alpha_1^1} \bar{x}_2^{\alpha_2^1}, A_2 \bar{x}_1^{\alpha_1^2} \bar{x}_2^{\alpha_2^2}) \end{aligned}$$

しかし、これは式 (24) と矛盾する。

Q.E.D.

4. おわりに

集計的生産関数は、所与の投入財ベクトルと、それを複数の生産関数に配分したときの生産量の合計の最大値との間の関係を示す。したがって、集計的生産関数の導出は、最大化問題の文脈でとらえることができる。そして、独占による生産が効率的であるという状況は、最大化問題の端点解に他ならない。

本稿は、収穫増下のコブ=ダグラス生産関数で表現された2生産技術・2投入財・1生産物の枠組みで、最大化のための二階の条件が成立しないことを保証する条件を探ることにより、独占が効率的となるための条件を導いた。そして、この限定的な枠組みにおいて、Hamano (2011) と Hamano (1996) の両方の条件が、われわれの条件に含まれることを明らかにした。したがって、平均生産性の比較という代数的な操作から導かれた後者の条件が、最大化のための二階の条件から導かれる条件よりも強い、ということが予想される。しかし、この予想の確認には、一般的なモデルの検討が必要であろう。

いうまでもなく、本稿の枠組みは、Hamano (1996) の一般的なモデルと比較すると、生産技術の数のみならず投入財の数に関しても、かなり限定的である。われわれのモデルを3つ以上の生産技術や投入財のケースに拡張することは、最大化のための二階の条件を求めるための計算量が多くなるにしろ、それほど困難ではないと思われる。ただ、生産技術の数についての拡張を考える場合、生産技術の数が1つ増加するとき、最大化問題の変数の数は投入財の数と同じだけ増加するため、計算の複雑度は加速する。これについては、将来の課題である。

ところで、非凸環境における最大化問題の端点解には2種類ある。ひとつは、本稿で扱ったように、最大化のための二階の条件が、いたるところで、もしくは一階の条件が成立する点に

において、成立しないというケースである。この場合、局所的に最大値をとる内点解は一切存在しない。そして、もう一つは、内点解が存在するケースである。つまり、内点で局所的に最大値をとるが、それが端点の値を下回る場合である。この場合もやはり、独占が効率的となる。残念ながらわれわれは、このような状況を分析するための道具を持ち合わせていない。これに関しても、将来の課題である。

謝辞

本稿を含む一連の研究の初期段階で、故坪沼秀昌教授から助言をいただいた。ここに記して謝意を表す。無論、残存するかもしれない誤りはすべて筆者の責任である。

Notes

- 1) この点に関しては、例えば、Mas-Colell et al. (1995, pp. 147-149) を見よ。
- 2) 自然独占については、例えば Sharkey (1982) を参照のこと。
- 3) コブ=ダグラス生産関数は通常、各投入財の指数の和が 1 となる、収穫不変（一次同次）の生産関数をさす。しかし、本稿では、収穫逓増のケースを含む一般化されたものも、コブ=ダグラス生産関数とよぶ。
- 4) 本稿は、同質な投入財（生産要素）を前提として、個別企業の生産関数がコブダグラス型で表現されている場合の集計的生産関数の導出を問題の対象とする。したがって、異質な投入財の集計問題や、代表的企業の個別生産関数からコブ=ダグラス型の集計的生産関数をいかに導くかという集計の問題は、本稿では扱わない。これらについては、例えば Felipe and Fisher (2003) を参照のこと。
- 5) すなわち、Hamano (2011) は、一方のコブダグラス生産関数のある投入財の指数が、もう一方の生産関数の別の投入財の指数になっているというケースを扱っている。
- 6) 優加法性については、例えば Rosenbaum (1950) を参照のこと。
- 7) Hamano (1996) を参照のこと。
- 8) 厳密に言えば、Ginsberg (1974) という例外も存在する。これは、1 投入財・1 生産物の枠組みで、convex-concave な生産関数の集計問題を扱っている。
- 9) 命題 2.6 の条件 (5) と (6) は、命題 2.8 の条件 (ii) から証明される。

参考文献

- Beato, P., and Mas-Colell A. (1985) "On marginal cost pricing equilibria with increasing returns." *Journal of Economic Theory* **37**: 356-365.
- Felipe, J. and Fisher, F.M. (2003) "Aggregation in production functions: what applied economists should know." *Metroeconomica* **54**: 208-262.
- Ginsberg, W. (1974) "The multiplant firm with increasing returns to scale." *Journal of Economic Theory* **9**: 283-292.
- Hamano, T. (1996) "Increasing returns and aggregate production efficiency by a monopoly." *Journal of Economics (Zeitschrift für Nationalökonomie)* **64**: 155-161.

収穫通増下のコブ＝ダグラス生産関数の集計について

- Hamano, T. (2011) “Generalized Cobb-Douglas Production Functions and Aggregate Production Efficiency by a Monopoly”, *Tokyo Keizai Gakkaishi* (東京経済学会誌－経済学－) **269**: 155-164.
- Mas-Colell, A., Whinston, M.D., Green, J.R. (1995) *Microeconomic Theory*. Oxford University Press, New York.
- Rosenbaum, R.A. (1950) “Sub-additive functions.” *Duke Journal of Mathematics* **17**: 231-248.
- Sharkey, W. (1982) *The theory of natural monopoly*. Cambridge University Press, Cambridge, M.A.