# リバース・ロジスティクスを含む生産在庫システムに対する生産在庫方策の一考察

若　尾　良　男

## 1. はじめに

生産在庫問題はオペレーショナル・リサーチやマネジメント・サイエンスの1つの研究分野であり，多くの研究者によって関心が持たれてきた。このような生産在庫問題は最適線形制御理論が成立した1960年代に進展し，最適制御理論でのモデル構築や最適化のさまざまな方法が特定の生産在庫問題に適用されてきた。 最適制御理論による生産在庫問題への適用のパイオニア的研究は, Holt, Modigliani, Muth, Simon（1960）によるHMMSモデルの提案であり，このモデルからさまざまな生産在庫モデルが開発されてきている。 HMMSモデルは，計画された生産と雇用に関連する実際のコストが2次コスト関数で近似できることを示し，その決定則が線形構造を持つので，利便性に優れているといわれている。

中古製品の再生（recovery）は，廃棄するよりは経済的であったということから，古くから，金属スクラップブローカー，古紙リサイクリング，ドリンクボトルのディポジット・システムなどのようなリサイクルがあり，‘再利用（reuse）’の志向は必ずしも新しくはない。しかし，近年の環境意識の向上によって，製品や材料の再利用への関心はますます高まってきている。また,「無駄をなくす」という考え方は製品や材料のリサイクルの考えをさらに高めてきており，生産工程に原材料のみを投入するという‘一方向’の生産形態から，再利用可能な中古製品の利用の機会を消費者から生産者の活動領域に戻すという新しい物の流れが発生してきている。伝統的なサプライ・チェーン・フローとは逆となるこのような物流の管理は，‘リバース・ロジスティクス’という名称で近年注目されている。‘リバース（reverse）’とは，最終消費者から生産者に戻る中古製品の物理的な伝達を含んでおり，リバース・ロジスティクスは，消費者がもはや必要としない中古製品から再び市場で利用できる製品に換えるあらゆるロジスティクス活動を包含している。

再生される品目のタイプに関して，Thierry 等（1995）は，直接再利用（direct reuse），修繕（repair），リサイクル（recycling），再製造（remanufacturing）の4つに区分している。

直接再利用の例は，瓶，パレット，コンティナー（container）のような再利用可能なパッケージである。修繕は，電気機器，産業機械，家庭器具のような耐久財に例があり，品質の劣化を容認するものの，故障した製品を‘稼動状態’に修理することである。リサイクルは材料が元の製品構造を保存せずに再生されることである。例えば，スクラップからの金属，ガラス，紙、プラスティックのリサイクルなどである。再製造は，製品そのものを保存し，必要な解体やオーバーホール，交換などによって新品と同じ状態に戻そうとすることであり，例として，複写機の部品，航空機のエンジン，機械ツールなどのような機械組立品がある。

リバース・ロジスティクスを持つ生産在庫問題に関して，Minner（2003）はサプライ・チェーン・マネジメントに在庫モデルが貢献するかを議論した際にリバース・ロジスティクスのモデルについて言及し，伝統的な在庫管理とは異なりリバース・ロジスティクスを持つ生産在庫問題では，リバース・フローの結果として新しい材料・部品調達の在庫レベルが減少するだけでなく増加もありうるということと，生産在庫システムへの供給モードが外部的な発注と再生という2つとなり，これらが協調しなければならないので，数学的なモデルが複雑になるということを指摘した。

最適制御理論を用いたリバース・ロジスティクスを持つ生産在庫システムに関する最近の研究は，確定的な単品リバース・ロジスティクス・システムにおいて発展的に考察されている。Kistner と Dobos（2000）は，2つの在庫施設を持ち廃棄施設がない連続時間リバース・ロジステックス・システムに対する最適在庫方策を考察した。Minner と Kleber（2001）は廃棄施設のある確定的な在庫システムと線形コスト構造に対する生産・再生産・廃棄方策を最適にする最適制御アプローチを考えた。Dobos（2003）は，Kistner と Dobos のモデル（2000）に廃棄施設を配置したリバース・ロジスティクス・システムに対する最適在庫方策を考察した。2つの在庫施設の在庫レベルを状態変数とし，製造レベル，再利用レベル，廃棄レベルを制御変数とする連続時間モデルに対して，基準在庫レベルと基準製造・再利用・廃棄レベルからの二次偏差の和を最小にするような最適方策が導出され，最適経路が需要レベルに依存することを数値的に示した。

本論文では，リバース・ロジスティクス・システムに対する生産在庫問題における Dobos（2003）の生産在庫モデルを離散時間システムで展開し，さらに市場からの中古品の回収率が一定でなく変動する場合に，ある範囲で変動しても最良の性能を示す製造・再利用・廃棄方策を提案する。2節では，回収率が変動するリバース・ロジスティクスを含む生産在庫モデルに対する準最適生産在庫・再利用問題が定式化され，最良の製造・再利用・廃棄方策が導出され，3節では数値計算によってその性能が調べられ，4節で結びが述べられる。

## 2. 準最適製造・再利用・廃棄問題の定式化

### 2. 1　リバース・ロジスティクを含む生産在庫・再利用モデル

いま，考慮する製造・再利用・廃棄期間の最終期間を$N$期間として，製品在庫施設と再利用回収施設である2つの貯蔵施設を持つリバース・ロジスティクス（Two-store Reverse Logistics）を含む離散時間生産在庫・再利用システムを考える。需要は，新しく製造された製品と再利用可能な中古製品が在庫されている製品在庫施設（Store1)からまかなわれる。製造された製品は市場に投入され，市場からある割合$\alpha$（回収率）で回収された中古製品は再利用のための回収品貯蔵施設（Store2）に貯蔵される。そして，Store2において回収品は再利用可能な回収品と廃棄される不要物とに分別され，再利用可能な回収品は製品在庫としてStore1に貯蔵されるものとする。これは図1のように表される。このような生産在庫・再利用システムに対して，Store1の在庫レベルとStore2の貯蔵レベルを状態変数として，製造レベル，再利用レベル，廃棄レベルの3つレベルを制御変数とする生産在庫・再利用システムモデルを構築し，指定された期間での基準在庫レベル，基準貯蔵レベルからのそれぞれの偏差の二乗と，基準製造レベル，基準再利用レベル，基準廃棄レベルからのそれぞれの偏差の二乗の総和を評価関数とする最適トラッキング制御問題として定式化する。このようなリバース・ロジスティクスを含む生産在庫・再利用システムは従来の研究でしばしば適用されるモデルである。本研究では，回収率に関して，確定的ではなく，回収率が各期において予測回収率$\hat{\alpha}$の周りで変動するものと考える。

これらから，考慮の対象となる生産在庫･再利用システムのシステム方程式を次のように表す。

$$i_1(k+1) = i_1(k) + p_m(k) + p_r(k) - d(k) \tag{1a}$$

$$i_2(k+1) = i_2(k) - p_r(k) - s(k) + r(k) \tag{1b}$$

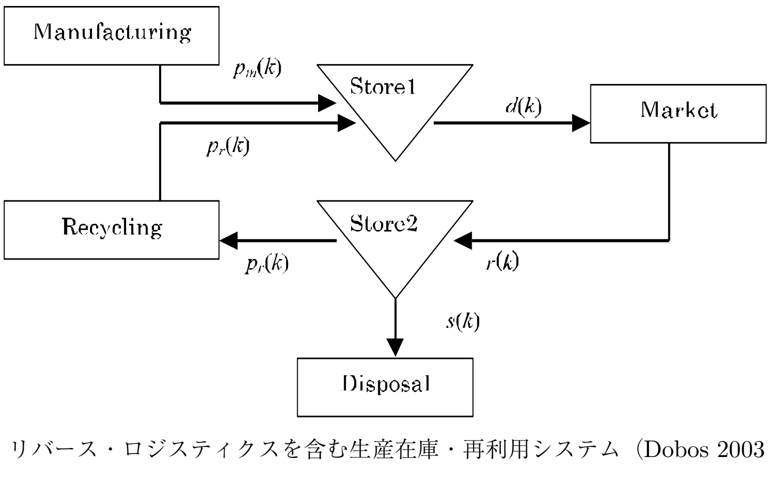



図 1　リバース・ロジスティクスを含む生産在庫・再利用システム（Dobos 2003 より）

ここで，$i_1(k)$ は $k$ 期の Store1 の製品在庫レベル，$p_m(k)$ は $k$ 期の製品の製造レベル，$p_r(k)$ は Store2 から再利用に利用される $k$ 期の回収品の再利用レベル，$d(k)$ は $k$ 期の製品の需要レベル，$i_2(k)$ は市場から再利用のために回収される $k$ 期の Store2 の回収品貯蔵レベル，$s(k)$ は不要物として廃棄される $k$ 期の回収品の廃棄レベル，$r(k)$ は市場から回収される $k$ 期の中古品の回収レベルを表す。ここで，需要については市場への投入と需要とが時間的に遅れがあるような需要 $d(k-\tau)$ と考えるのではなく，特に遅れを考慮しないで，投入と同時に消費されるものとして，$d(k)$ と考える。このとき，需要からの回収率を $\alpha(k)$ で表すと，回収率は予測回収率 $\hat{\alpha}$ の回りで変動する場合を仮定して，回収レベルは需要レベルと次のような関係があるとする。

$$r(k) = \alpha(k)d(k) \tag{2}$$

製品在庫・回収品貯蔵レベルと製品製造・再利用・廃棄レベルの関係を表す生産在庫・再利用システム方程式を行列ベクトル表示すると，

$$\begin{pmatrix} i_1(k+1) \\ i_2(k+1) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} i_1(k) \\ i_2(k) \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} p_m(k) \\ p_r(k) \\ s(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ \alpha(k) \end{pmatrix} d(k) \tag{3$a$}$$

となる。これを次のように，

$$\boldsymbol{i}(k+1) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{i}(k) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{p}(k) + \boldsymbol{c}(k)d(k) \tag{3$b$}$$

と表す。ただし，$\boldsymbol{i}(k)^T = [i_1(k)\, i_2(k)]^T$ は 2 次元の状態変数ベクトルであり，それぞれの貯蔵施設の在庫と貯蔵のレベルを表し，$\boldsymbol{p}(k)^T = [p_m(k)\, p_r(k)\, s(k)]^T$ は 3 次元の制御変数ベクトルで，それぞれ製造，再利用，廃棄のレベルを表す。なお，$(\cdot)^T$ は転置ベクトルを表す。行列 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ と，ベクトル $\boldsymbol{c}(k)$ はそれぞれ以下のような要素と対応する次元をもつ。

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{c}(k) = \begin{pmatrix} -1 \\ \alpha(k) \end{pmatrix} \tag{4}$$

次に，評価コスト関数に関連するコスト要素として，製品製造の 1 製造レベル当りのコスト ($c_m$ と表す)，再利用可能な回収品の 1 再利用レベル当りコスト ($c_u$)，製品の 1 在庫レベル当りコスト ($h_1$)，1 回収品レベル当りの貯蔵コスト ($h_2$)，不要な回収品の 1 廃棄レベル当りのコスト ($c_d$)，市場から中古品を回収する際の 1 回収レベル当りコスト ($c_r$) を考える。これから，あらかじめ設定された各期の基準製品在庫レベル，基準回収品貯蔵レベルからのそれぞれの偏差の二乗と，基準製造レベル，基準再利用レベル，基準廃棄レベルからのそれぞれの偏差の二乗の総和を最小にすることを考える。すなわち，次のようなコスト $TC$ を考える。

$$
\begin{aligned}
TC = &\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}[h_1(i_1(k)-\bar{i}_1(k))^2 + h_2(i_2(k)-\bar{i}_2(k))^2] \\
&+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}[c_m(p_m(k)-\bar{p}_m(k))^2 + c_u(p_r(k)-\bar{p}_r(k))^2 + c_d(s(k)-\bar{s}(k))^2 + c_r\alpha(k)d(k)] \\
&+\frac{1}{2}[h_1(i_1(N)-\bar{i}_1(N))^2 + h_2(i_2(N)-\bar{i}_2(N))^2] \qquad (5)
\end{aligned}
$$

これを，ベクトル表示で表すと，

$$
\begin{aligned}
TC = &\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}[(\boldsymbol{i}(k)-\bar{\boldsymbol{i}}(k))^T\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{i}(k)-\bar{\boldsymbol{i}}(k)) + (\boldsymbol{p}(k)-\bar{\boldsymbol{p}}(k))^T\boldsymbol{R}(\boldsymbol{p}(k)-\bar{\boldsymbol{p}}(k)) + c_r\alpha(k)d(k)] \\
&+\frac{1}{2}(\boldsymbol{i}(N)-\bar{\boldsymbol{i}}(N))^T\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{i}(N)-\bar{\boldsymbol{i}}(N)) \qquad (6)
\end{aligned}
$$

となる。ここで，$\bar{\boldsymbol{i}}(k)$は2次元ベクトルで基準在庫・貯蔵レベルを表し，$\bar{\boldsymbol{p}}(k)$は3次元ベクトルで基準製造・再利用・廃棄レベルを表す。行列$\boldsymbol{Q}$と$\boldsymbol{R}$はそれぞれ以下のような$2\times2$と$3\times3$行列を表し，それぞれ在庫・貯蔵コストと製造・再利用・廃棄コストを表す。

$$
\bar{\boldsymbol{i}}(k) = \begin{pmatrix} \bar{i}_i(k) \\ \bar{i}_2(k) \end{pmatrix}, \quad \bar{\boldsymbol{p}}(k) = \begin{pmatrix} \bar{p}_m(k) \\ \bar{p}_r(k) \\ \bar{s}(k) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} h_1 & 0 \\ 0 & h_2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} c_m & 0 & 0 \\ 0 & c_u & 0 \\ 0 & 0 & c_d \end{pmatrix} \qquad (7)
$$

### 2.2　準最適製造・再利用・廃棄方策の導出

一般的に製品の市場からの回収率はある程度予測が可能であるが，必ずしも一定ではなく変動すると考えられる。今から考える製造・再利用・廃棄方策は，回収率について，各期一律に予測回収率を用いるのではなく，回収率が予測値に対してある幅$s\delta$で変動するとする。すなわち，

$$
\alpha_l = \hat{\alpha} - s\delta \leqq \alpha(k) \leqq \alpha_u = \hat{\alpha} + s\delta \qquad (8)
$$

と考え，実際の回収率が予測回収率から大幅に変わり，製造・再利用・廃棄方策にとって好ましくない変動をしたとしても，最良の方策を採るような製造・再利用・廃棄方策を考える。これは，モデルパラメータの回収率に対して評価コストを最大（最悪）にし，制御変数の製造・再利用・廃棄レベルについては評価コストを最小（最良）にするような製造・再利用・廃棄方策を求めることになる。しかしながら，これらの操作は最適方策の中に最悪な回収率を含む係数ベクトルを含むため，それぞれの操作を独立に行なうことが出来ず，また，制御方策が閉じた形で導出することも出来ない。そこで，制御方策が簡便な形で得られるように，まず，シス

テム方程式の需要 $d(k)$ の係数ベクトル $\boldsymbol{c}(k)$ に含まれる回収率 $\alpha(k)$ は評価コストを最大にする回収率であるとして最適製造・再利用・廃棄方策を求め，それから，その最適方策から計算される評価コストを最大にする回収率 $\alpha^{*}(k)$ を指定するという準最適な方策を採用することとする。

いま，$N-1$ 期の製造・再利用方策を考える。$N-1$ 期の評価コスト $V(N-1)$ は，

$$
\begin{aligned}
V(N-1) \;=\; & \frac{1}{2}[(\boldsymbol{i}(N-1)-\bar{\boldsymbol{i}}(N-1))^{T}\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{i}(N-1)-\bar{\boldsymbol{i}}(N-1)) \\
& +(\boldsymbol{p}(N-1)-\bar{\boldsymbol{p}}(N-1))^{T}\boldsymbol{R}(\boldsymbol{p}(N-1)-\bar{\boldsymbol{p}}(N-1))] \\
& +\frac{1}{2}[\{\boldsymbol{Ai}(N-1)+\boldsymbol{Bp}(N-1)+\boldsymbol{c}(N-1)d(N-1)-\bar{\boldsymbol{i}}(N)\}^{T}\boldsymbol{P}(N) \\
& \times\{\boldsymbol{Ai}(N-1)+\boldsymbol{Bp}(N-1)+\boldsymbol{c}(N-1)d(N-1)-\bar{\boldsymbol{i}}(N)\}] \qquad (9)
\end{aligned}
$$

となる。ここで $V(N-1)$，を最小にする $\boldsymbol{p}(N-1)$ を求める。

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial V(N-1)}{\partial \boldsymbol{p}(N-1)} \;=\; & \boldsymbol{R}(\boldsymbol{p}(N-1)-\bar{\boldsymbol{p}}(N-1))+[\boldsymbol{B}^{T}\boldsymbol{P}(N)\{\boldsymbol{Ai}(N-1)+\boldsymbol{Bp}(N-1) \\
& +\boldsymbol{c}(N-1)d(N-1)-\bar{\boldsymbol{i}}(N)\}]=0 \qquad (10)
\end{aligned}
$$

これより，最悪な回収率を考えない $N-1$ 期の最良な方策は，以下のように求められる。

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{p}^{*}(N-1) \;=\; & -\{\boldsymbol{B}^{T}\boldsymbol{P}(N)\boldsymbol{B}+\boldsymbol{R}\}^{-1}[\boldsymbol{B}^{T}\boldsymbol{P}(N)\boldsymbol{Ai}(N-1)+\boldsymbol{B}^{T}\boldsymbol{P}(N)\boldsymbol{c}(N-1)d(N-1) \\
& -\boldsymbol{R}\bar{\boldsymbol{p}}(N-1)-\boldsymbol{B}^{T}\boldsymbol{P}(N)\bar{\boldsymbol{i}}(N)] \\
\equiv\; & \boldsymbol{K}(N)\boldsymbol{i}(N-1)+\boldsymbol{L}(N)d(N-1)+\boldsymbol{M}(N)\bar{\boldsymbol{p}}(N-1) \\
& +\boldsymbol{N}(N)\boldsymbol{P}(N)\bar{\boldsymbol{i}}(N) \qquad (11)
\end{aligned}
$$

この $\boldsymbol{p}^{*}(N-1)$ を $V(N-1)$ に代入して，$N-1$ 期の評価コストを求めると，

$$
V(N-1)=\frac{1}{2}\boldsymbol{i}(N-1)^{T}\boldsymbol{P}(N-1)\boldsymbol{i}(N-1)+\boldsymbol{g}(N-1)^{T}\boldsymbol{i}(N-1)+\eta(N) \qquad (12)
$$

となる。ここで，正定値行列 $\boldsymbol{P}$ は次のようになる。

$$
\boldsymbol{P}(N-1)=\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{K}^{T}\boldsymbol{RK}+(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK})^{T}\boldsymbol{P}(N)(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK}),\;\; \boldsymbol{P}(N)=\boldsymbol{Q} \qquad (13)
$$

ただし，　$\boldsymbol{P}(N)=\boldsymbol{Q}$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{g}(N-1)=\; & -\boldsymbol{Q}\bar{\boldsymbol{i}}(N-1) \\
& +\{\boldsymbol{K}(N)^{T}\boldsymbol{RL}(N)+(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK}(N))^{T}\boldsymbol{P}(N)(\boldsymbol{BL}(N)+\boldsymbol{c}(k))\}d(N-1) \\
& +\{\boldsymbol{K}(N)^{T}\boldsymbol{R}(\boldsymbol{M}(N)-\boldsymbol{I})+(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK}(N))^{T}\boldsymbol{P}(N)(\boldsymbol{BM}(N)\}\bar{\boldsymbol{p}}(N-1) \\
& +\{\boldsymbol{K}(N)^{T}\boldsymbol{RN}(N)+(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK}(N))^{T}\boldsymbol{P}(N)(\boldsymbol{BN}(N)\}\boldsymbol{g}(N), \qquad (14)
\end{aligned}
$$

ただし，　$\boldsymbol{g}(N)=-\boldsymbol{P}(N)\bar{\boldsymbol{i}}(N)$

$$
\begin{aligned}
\eta(N-1) = \frac{1}{2}\,[&\bar{\boldsymbol{i}}\,(N-1)^T\boldsymbol{Q}\bar{\boldsymbol{i}}\,(N-1)\\
&+\{\boldsymbol{L}(N)d(N-1)+(\boldsymbol{M}(N)-\boldsymbol{I})\,\bar{\boldsymbol{p}}\,(N-1)+\boldsymbol{N}(N)\boldsymbol{g}(N)\}^T\boldsymbol{R}\\
&\times\{\boldsymbol{L}(N)d(N-1)+(\boldsymbol{M}(N)-\boldsymbol{I})\,\bar{\boldsymbol{p}}\,(N-1)+\boldsymbol{N}(N)\boldsymbol{g}(N)\}\\
&+\{(\boldsymbol{BL}(N)+\boldsymbol{c}(N-1))d(N-1)+\boldsymbol{BM}(N)\,\bar{\boldsymbol{p}}(N-1)+\boldsymbol{BN}(N)\boldsymbol{g}(N)\}^T\boldsymbol{P}(N)\\
&\times\{(\boldsymbol{BL}(N)+\boldsymbol{c}(N-1))d(N-1)+\boldsymbol{BM}(N)\,\bar{\boldsymbol{p}}(N-1)+\boldsymbol{BN}(N)\boldsymbol{g}(N)\}]\\
&+\boldsymbol{g}(N)^T\{(\boldsymbol{BL}(N)+\boldsymbol{c}(N-1))d(N-1)+\boldsymbol{BM}(N)\,\bar{\boldsymbol{p}}(N-1)+\boldsymbol{BN}(N)\boldsymbol{g}(N)\}\\
&+\eta(N), \qquad (15)
\end{aligned}
$$

ただし，　$\eta(N)=\bar{\boldsymbol{i}}\,(N)^T\boldsymbol{Q}\bar{\boldsymbol{i}}\,(N)\,/\,2$

このとき，$N-1$ 期の評価コスト $V(N-1)$ から回収率 $\alpha(N-1)$ に関連する項 $\nu(\alpha,\,N-1)$ を抽出すると，以下のようになる。

$$
\begin{aligned}
\nu(\alpha,\,N-1) &= d(N-1)\{\boldsymbol{L}(N)^T\boldsymbol{RK}(N)+(\boldsymbol{BL}(N)+\boldsymbol{c}(N-1))^T\boldsymbol{P}(N)(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK}(N))\}\boldsymbol{i}(N-1)\\
&+\frac{1}{2}\,[\{\boldsymbol{L}(N)^T\boldsymbol{RL}(N)+(\boldsymbol{BL}(N)+\boldsymbol{c}(N-1))^T\boldsymbol{P}(N)(\boldsymbol{BL}(N)+\boldsymbol{c}(N-1))\}d(N-1)^2\\
&+2\bar{\boldsymbol{i}}\,(N)^T\boldsymbol{P}(N)\{\boldsymbol{N}(N)^T\boldsymbol{RL}(N)+(\boldsymbol{BN}(N)-\boldsymbol{I})^T\boldsymbol{P}(N)(\boldsymbol{BL}(N)+\boldsymbol{c}(N-1))\}\\
&\times d(N-1)\\
&+2d(N-1)\{\boldsymbol{L}(N)^T\boldsymbol{R}(\boldsymbol{M}(N)-\boldsymbol{I})+(\boldsymbol{BL}(N)+\boldsymbol{c}(N-1))^T\boldsymbol{P}(N)\boldsymbol{BM}(N)\}\\
&\times\bar{\boldsymbol{p}}(N-1)\\
&= d(N-1)\{\boldsymbol{c}(N-1)^T\boldsymbol{P}(N)(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}\{\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P}(N)\boldsymbol{B}+\boldsymbol{R}\}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P}(N))\boldsymbol{A}\}\boldsymbol{i}(N-1)\\
&+\frac{1}{2}\,[\{\boldsymbol{c}(N-1)^T(\boldsymbol{P}(N)^{-1}+\boldsymbol{BR}^{-1}\boldsymbol{B}^T)\boldsymbol{c}(N-1)\}d(N-1)^2\\
&+2\bar{\boldsymbol{i}}\,(N)^T\{\boldsymbol{P}(N)(\boldsymbol{B}\{\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P}(N)\boldsymbol{B}+\boldsymbol{R}\}^{-1}\boldsymbol{P}(N)-\boldsymbol{I})\boldsymbol{c}(N-1))\}d(N-1)\\
&+2d(N-1)\{\boldsymbol{c}(N-1)^T\boldsymbol{P}(N)\boldsymbol{B}\{\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P}(N)\boldsymbol{B}+\boldsymbol{R}\}^{-1}\boldsymbol{R}\}\bar{\boldsymbol{p}}(N-1)] \qquad (16)
\end{aligned}
$$

さらに，$d(N-1)^2$ の係数行列は以下のような簡便な表現となる。

$$
\begin{aligned}
&\{\boldsymbol{L}(N)^T\boldsymbol{RL}(N)+(\boldsymbol{BL}(N)+\boldsymbol{c}(N-1))^T\boldsymbol{P}(N)(\boldsymbol{BL}(N)+\boldsymbol{c}(N-1))\}\\
&\quad=\boldsymbol{c}(N-1)^T\boldsymbol{P}(N)\,\boldsymbol{B}\{\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P}(N)\boldsymbol{B}+\boldsymbol{R}\}^{-1}\boldsymbol{R}\{\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P}(N)\boldsymbol{B}+\boldsymbol{R}\}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P}(N)\boldsymbol{c}(N-1)\\
&\quad+\boldsymbol{c}(N-1)^T\boldsymbol{P}(N)\,\boldsymbol{B}\{\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P}(N)\boldsymbol{B}+\boldsymbol{R}\}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P}(N)(\boldsymbol{B}\{\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P}(k+1)\boldsymbol{B}+\boldsymbol{R}\}^{-1}\boldsymbol{B}^T\\
&\quad\times\boldsymbol{P}(N)\boldsymbol{c}(N-1)\\
&\quad-\boldsymbol{c}(N-1)^T\boldsymbol{P}(N)\,\boldsymbol{B}\{\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P}(N)\boldsymbol{B}+\boldsymbol{R}\}^{-1}\boldsymbol{P}(N)\boldsymbol{c}(N-1))\\
&\quad-\boldsymbol{c}(N-1)^T\boldsymbol{P}(N)\,\boldsymbol{B}\{\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P}(N)\boldsymbol{B}+\boldsymbol{R}\}^{-1}\boldsymbol{P}(N)\boldsymbol{c}(N-1))+\boldsymbol{c}(N-1)^T\boldsymbol{P}(N)\boldsymbol{c}(N-1)\\
&\quad=\boldsymbol{c}(N-1)^T[\boldsymbol{P}(N)^{-1}+\boldsymbol{BR}^{-1}\boldsymbol{B}^T]\boldsymbol{c}(N-1) \qquad (17)
\end{aligned}
$$

ここで，$\boldsymbol{P}(N)$ と $\boldsymbol{R}$ は正定値行列であるので，$\alpha(k)$ の 2 次項の係数となる $\boldsymbol{P}(N)^{-1}+\boldsymbol{BR}^{-1}\boldsymbol{B}^T$ の (3, 3) 要素 $p_{22}{}^{-1}+r_{22}{}^{-1}+r_{33}{}^{-1}$ は正となる。したがって，$\nu(\alpha,\,N-1)$ は $\alpha$ に関して下に凸の 2

次関数となる。こうして，$V(N-1)$の最大化を考えると，$\alpha_l=\hat{\alpha}-s\delta \leqq \alpha(k) \leqq \alpha_u=\hat{\alpha}+s\delta$の範囲では，$\alpha=\alpha_l$または$\alpha=\alpha_u$で最大値をとることがわかる。さらに，$\nu(\alpha,\ N-1)$を$\boldsymbol{c}(N-1)$で微分して，

$$\frac{d\nu(\alpha,N-1)}{d\boldsymbol{c}(N-1)}=0 \tag{18}$$

となる$\alpha$を$\alpha_0(N-1)$と表すと，$\alpha_0(N-1)\geqq\hat{\alpha}$のときには$\nu(\alpha,\ N-1)$が$\alpha^*(N-1)=\alpha_l$で最大となり，$\alpha_0(N-1)\leqq\hat{\alpha}$のときには$\alpha^*(N-1)=\alpha_u$で$\nu(\alpha,N-1)$が最大となることがいえる。しかしながら，この$\alpha_0(N-1)$の値は$N-1$期には確定していない。なぜならば，$\alpha_0(N-1)$は$\boldsymbol{i}(N-1)$を含むが，最終期間から後ろ向きに$\alpha_0(N-1)$を求める時に$\boldsymbol{i}(N-1)$の値はまだ得られていない。したがって，事前に$\alpha_0(N-1)$の値を指定することは出来ないので，評価コストを最大にする最悪な回収率$\alpha^*(N-1)$も得られない。そこで，$\boldsymbol{i}(N-1)$を任意な値として，$\nu(\alpha_u,\ N-1)$と$\nu(\alpha_l,\ N-1)$とを比較して，$\nu(\alpha,\ N-1)$を最大にする回収率$\alpha^*(N-1)$を決定する。ここで,$V(N-1)$を最大とする最悪な回収率$\alpha^*(N-1)$を含む$\boldsymbol{c}(N-1)$を$\boldsymbol{c}^*(N-1)$と表す。さらに，$\boldsymbol{c}^*(N-1)$を含む$\boldsymbol{L}(N)$を$\boldsymbol{L}^*(N)$と，$\boldsymbol{L}^*(N)$を含む$\boldsymbol{P}(N-1)$を$\boldsymbol{P}^*(N-1)$と表すと，$N-1$期の最悪の回収率を考慮した準最適製造・再利用・廃棄方策$\boldsymbol{p}^*(N-1)$は次のように求められる。

$$\boldsymbol{p}^*(N-1)=\boldsymbol{K}^*(N)\boldsymbol{i}(N-1)+\boldsymbol{L}^*(N)d(N-1)+\boldsymbol{M}^*(N)\bar{\boldsymbol{p}}(N-1)+\boldsymbol{N}^*(N)P(N)\bar{\boldsymbol{i}}(N) \tag{19}$$

ここで,

$$\boldsymbol{K}^*(N)=-\{\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P}^*(N)\boldsymbol{B}+\boldsymbol{R}\}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P}^*(N)\boldsymbol{A} \tag{20a}$$
$$\boldsymbol{L}^*(N)=-\{\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P}^*(N)\boldsymbol{B}+\boldsymbol{R}\}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P}^*(N)\boldsymbol{c}^*(N-1) \tag{20b}$$
$$\boldsymbol{M}^*(N)=\{\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P}^*(N)\boldsymbol{B}+\boldsymbol{R}\}^{-1}\boldsymbol{R} \tag{20c}$$
$$\boldsymbol{N}^*(N)=-\{\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P}^*(N)\boldsymbol{B}+\boldsymbol{R}\}^{-1}\boldsymbol{B}^T \tag{20d}$$

ただし，$\boldsymbol{P}^*(N)=\boldsymbol{Q},\quad \boldsymbol{g}(N)=-\boldsymbol{P}^*(N)\bar{\boldsymbol{i}}(N)$

この手順を順次$N-1$期から始めて後ろ向きに0期まで進めていき，$k$期の評価コスト関数$V(k)$を最大にする最悪回収率の系列$\{\alpha^*(k);\ k=N-1,\cdots,0\}$を求める。あらかじめ求めた最適製造・再利用・廃棄方策に含まれている係数ベクトル$\boldsymbol{c}(k)$の$(2,1)$要素である回収率$\alpha(k)$を,$\alpha^*(k)$に置き換えたものを$\boldsymbol{c}^*(k)$と表す。これより,$\boldsymbol{c}^*(k)$を含む$\boldsymbol{L}(k+1)$を$\boldsymbol{L}^*(k+1)$，$\boldsymbol{L}^*(k+1)$を含む$\boldsymbol{P}(k)$を$\boldsymbol{P}^*(k)$と表すと，$k$期の最悪な回収率を考慮した準最適製造・再利用・廃棄方策$\boldsymbol{p}^*(k)$は次のように求められる。

$$\boldsymbol{p}^*(k)=\boldsymbol{K}^*(k+1)\boldsymbol{i}(k)+\boldsymbol{L}^*(k+1)d(k)+\boldsymbol{M}^*(k+1)\bar{\boldsymbol{p}}(k)+\boldsymbol{N}^*(k+1)\boldsymbol{g}^*(k+1) \tag{21}$$

$$\boldsymbol{K}^*(k+1) = -\{\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P}^*(k+1)\boldsymbol{B}+\boldsymbol{R}\}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P}^*(k+1)\boldsymbol{A} \tag{22a}$$

$$\boldsymbol{L}^*(k+1) = -\{\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P}^*(k+1)\boldsymbol{B}+\boldsymbol{R}\}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P}^*(k+1)\boldsymbol{c}^*(k) \tag{22b}$$

$$\boldsymbol{M}^*(k+1) = \{\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P}^*(k+1)\boldsymbol{B}+\boldsymbol{R}\}^{-1}\boldsymbol{R} \tag{22c}$$

$$\boldsymbol{N}^*(k+1) = -\{\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P}^*(k+1)\boldsymbol{B}+\boldsymbol{R}\}^{-1}\boldsymbol{B}^T \tag{22d}$$

$$\boldsymbol{P}^*(k) = \boldsymbol{Q}+\boldsymbol{K}^*(k+1)^T\boldsymbol{R}\boldsymbol{K}^*(k+1)+(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}^*(k+1))^T\boldsymbol{P}^*(k+1)(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}^*(k+1)) \tag{23}$$

ただし，　$\boldsymbol{P}^*(N) = \boldsymbol{P}(N) = \boldsymbol{Q}$

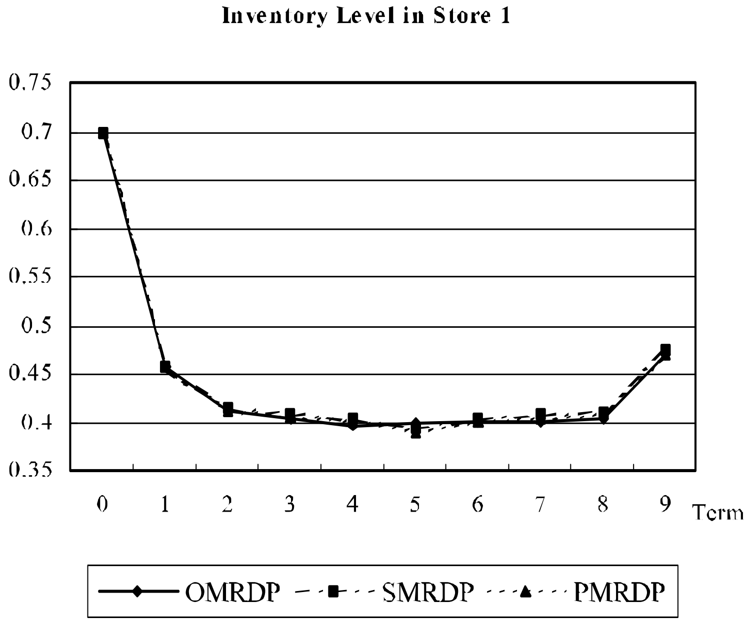
$$\begin{aligned}
\boldsymbol{g}^*(k) = &-\boldsymbol{Q}\bar{\boldsymbol{i}}(k) \\
&+\{\boldsymbol{K}^*(k+1)^T\boldsymbol{R}\boldsymbol{L}^*(k+1)+(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}^*(k+1))^T\boldsymbol{P}^*(k+1)\boldsymbol{B}\boldsymbol{L}^*(k+1)+\boldsymbol{c}^*(k))\}d(k) \\
&+\{\boldsymbol{K}^*(k+1)^T\boldsymbol{R}(\boldsymbol{M}^*(k+1)-\boldsymbol{I})+(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}^*(k+1))^T\boldsymbol{P}^*(k+1)\boldsymbol{B}\boldsymbol{M}^*(k+1)\}\bar{\boldsymbol{p}}(k) \\
&+\{\boldsymbol{K}^*(k+1)^T\boldsymbol{R}\boldsymbol{N}^*(k+1)+(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}^*(k+1))^T\boldsymbol{P}^*(k+1)\boldsymbol{B}\boldsymbol{N}^*(k+1)\}\boldsymbol{g}^*(k+1) \\
&+(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}^*(k+1))^T\boldsymbol{g}^*(k+1),
\end{aligned} \tag{24}$$

ただし，　$\boldsymbol{g}^*(N) = \boldsymbol{g}(N) = -\boldsymbol{P}(N)\bar{\boldsymbol{i}}(N)$

## 3. 数値例による製造・再利用・廃棄方策の性能

本研究で導出した製造・再利用・廃棄方策の特性や性能を調べるために，以下のようなモデルパラメータの値を設定して数値計算を行なった。回収率は予測値$\hat{\alpha}$の回りにある幅$s\delta$で変動する，すなわち，$\alpha_l = \hat{\alpha} - s\delta \leqq \alpha(k) \leqq \alpha_u = \hat{\alpha} + s\delta$ と考え，数値計算では，$s$と$\delta$を変更して，平均評価コストの値を比較してみた。ここで導出した製造・再利用・廃棄方策（The Proposed Manufacturing/Reuse/Disposal Policy; PMRDP）と比較するために，実際に各期で変動した回収率の系列$\{\alpha(k);\ \ k=0,\cdots,N-1\}$を既知として求めた最適製造・再利用・廃棄方策（The Optimal Manufacturing/Reuse/Disposal Policy; OMRDP）と予測回収率$\hat{\alpha}$を全期間で採用した準最適方策（The Sub-optimal Manufacturing/Reuse/Disposal Policy; SMRDP）の場合を考えた。数値計算で用いた製造・再利用・廃棄モデルのパラメータは，製品在庫（Store1）の初期レベル値$i_1(0)=0.7$，再利用の貯蔵（Store2）の初期レベル値$i_2(0)=0.5$，製品の需要レベル$\{d(k)=0.4;\ \ k=0,\cdots,9\}$, 基準製品在庫レベル$\{\bar{i}_1(k)=0.4;\ \ k=0,\cdots,9\}$，基準貯蔵レベル$\{\bar{i}_2(k)=0.3;\ \ k=0,\cdots,9\}$，基準生産レベル$\{\bar{p}_m(k)=0.3;\ \ k=0,\cdots,9\}$，基準再利用レベル$\{\bar{p}_r(k)=0.3;\ \ k=0,\cdots,9\}$，基準廃棄レベル$\{\bar{s}(k)=0.2;\ \ k=0,\cdots,9\}$とし，コストに関しては，製品在庫1レベル当たりのコスト$h_1=1.0$，再利用のための貯蔵1レベル当たりのコスト$h_2=1.0$，製造1レベル当たりのコスト$c_m=1.0$，再利用1レベル当たりのコスト$c_u=1.0$，廃棄1レベル当たりのコスト$c_d=1.0$，回収1レベル当たりのコスト$c_r=2.0$を考える。ここで，実際の回収率の系列は，平均が予測回収率$\hat{\alpha}$で標準偏差$\delta$の正規乱数を発生させ

た数値を用いた。数値結果は以下の表1にまとめられ，典型的な製造・再利用・廃棄方策の在庫レベルの推移を図2に表す。



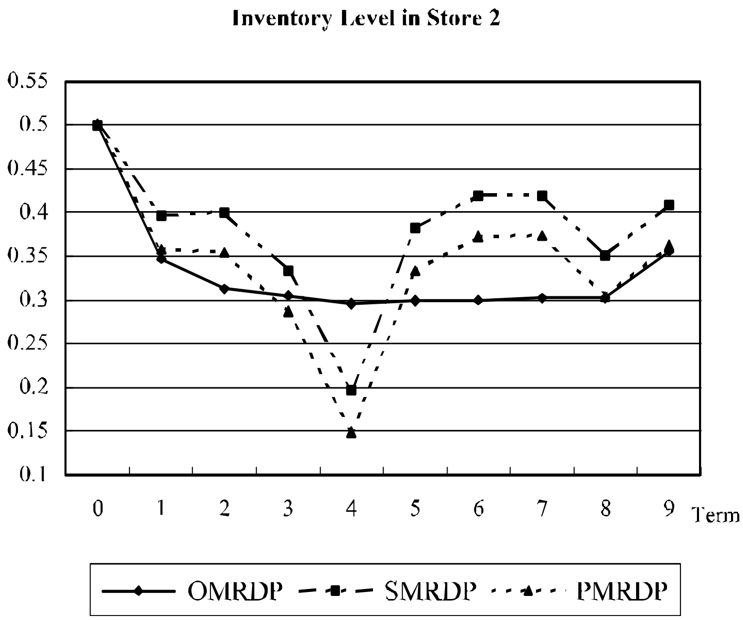




図２　典型的な製造・再利用・廃棄方策の在庫レベルの推移

**表 1**　各製造・再利用・廃棄方策の性能比較

| $\hat{\alpha}$ | $\delta$ | $s$ | $TC$ of OMRDP | $TC$ of SMRDP | $TC$ of PMRDP |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.4 | 0.1 | 0.5 | 2.132 | 2.164 | 2.146 |
| | | 1.0 | | | 2.143 |
| | | 2.0 | | | 2.182 |
| | 0.2 | 0.5 | 2.328 | 2.487 | 2.383 |
| | | 1.0 | | | 2.387 |
| | | 2.0 | | | 2.574 |
| 0.6 | 0.1 | 0.5 | 2.782 | 2.813 | 2.796 |
| | | 1.0 | | | 2.795 |
| | | 2.0 | | | 2.835 |
| | 0.2 | 0.5 | 2.989 | 3.097 | 3.044 |
| | | 1.0 | | | 3.051 |
| | | 2.0 | | | 3.242 |
| 0.8 | 0.1 | 0.5 | 3.471 | 3.501 | 3.485 |
| | | 1.0 | | | 3.484 |
| | | 2.0 | | | 3.527 |
| | 0.2 | 0.5 | 3.689 | 3.794 | 3.744 |
| | | 1.0 | | | 3.752 |
| | | 2.0 | | | 3.947 |

上記の数値実験によると，回収率の標準偏差が大きくなると，本製造・再利用・廃棄方策が平均回収率を用いた準最適方策より総コストが低くなる。しかし，回収率の変動幅が大きくなると，本方策の総コストが高くなる傾向がある。

## 4. 結　び

本論文では，廃棄処理のあるリバース・ロジスティクスを含む離散時間生産在庫・再利用システムモデルに対して最適トラッキング問題として最適製造・再利用・廃棄方策を導出し，さらに，モデルパラメータである回収率が変動するときにある範囲での変動を考慮した準最適製造・再利用・廃棄方策を提案した。数値計算によって，本研究で提案した製造・再利用・廃棄方策の性能が調べられ，回収率がある範囲で変動するときに，それを考慮に入れない製造・再利用・廃棄方策より良好な結果を得た。今後の課題として，本研究で導出した製造・再利用・廃棄方策のモデルパラメータによる影響をより詳しく調べることと，回収率を制御変数とするような積極的にリサイクリングを行なう製造・リサイクル方策も考えられる。また，再製造方策として本方策を再考することも意味があろう。

## 参 考 文 献

[1] Dobos, I. 2003 "Optimal Production-inventory Strategies for a Reverse Logistics System," *Int. J. Production Economics* 81–82, 351–360.

[2] Holt, C.C., Modigliani, F., Muth, J.F., and Simon, H.A. 1960 "*Planning Production*, *Inventories*, *and Work Force*," Prentice-Hall, Inc., Englewood Clffs, N.J.

[3] Kistner, K-P. and Dobos, I. 2000 "Optimal Production-Inventory Strategies for a Reverse Logistics System," *Optimization*, *Dynamics*, *and Economic Analysis. Essays in Honor of Gustav Feichtinger*, Dockner, E.J., Hartl, R.F., Luptacik, M., and Sorger, G.(eds), Physica-Verlag

[4] Minner, S. and Kleber, R. 2001 "Optimal Control of Production and remanufacturing in a Simple Recovery Model with Linear Cost Functions," *OR Spektrum* 23, 3–24.

[5] Minner, S. 2003 "Multiple-supplier Inventory Models in Supply Chain Management: A Review," *Int. J. Production Economics* 81–82, 265–279.

—— 2005年12月9日受領 ——