数的思考に関する科目の教育方法についての研究

水　谷　昌　義

1．本稿の目的

本稿は学力低下論争を蒸し返したり，それに意見を述べたり解説したりする目的のものではない。

1999年に『分数ができない大学生』［7］が上梓されて以来，その書名の妙と衝撃性が世の中への強いアピールとなり，いわゆる学力低下論争が教育界のみならず広範な論者を巻き込んで数年にわたり展開されていった。とくに，新聞社を筆頭とするマスコミ界が，ゆとり教育を標榜する文教政策批判への好適な一材料として，検証などをほとんどすることなく挙って取り上げたことが，教育問題に本来関心のない一般へも訴えかけることになったものと本稿の筆者は考える。

確かに大学生のなかには分数どころか掛け算九九すら覚束ない者がごく少数とはいえ含まれているが，簡単な検証を行えば，大部分の者は分数の計算問題は解けることがることが分かるはずである。もちろん，小学校で計算の仕方を習っただけで，計算方法の意味を理解することなく，またその後も使う機会を皆無に過ごしてきた者が大部分であるが故，計算ミスや勘違いは多く発生するが，一度注意をすれば思い出し，正しく計算をできる場合がほとんどである。使う必要性を感じず，使う機会もなかったものを急にテストすれば，計算ミス等は起こって当然のことであり，単にペーパーテストの解答が不正解であったことだけを捉えて「分数ができない」と結論付けるのは聊か極論であろう。同じテストを大人にも行ったとすれば，大学生以上に惨憺たる結果となったであろう。前掲書を詳細に読めば，単にそういうことだけを殊更に強調している内容ではないが，その内容が充分理解されることはなく，書名だけが独り歩きをしてしまったのは事実であろう。

学力低下という概念に隣接して，勉強離れや読書離れを危惧する論議も多くなされ，これは今でも，中学生は毎月平均1冊の読書すらしない，などの調査結果がしばしば報道されたりしている。

本稿の筆者は文系の平均的レベルの大学で理数系科目の教育に携わっている。それらの科目は必修のものではなく，学生自らが選んで履修を決めたものである。科目や年によって変動はあるものの，100名程度から300名程度の受講者となっていることが多い。

履修を決めあぐねている学生からしばしば出される質問に，「これは役に立つのですか」というものがある。よく話を聞いてみると，彼らはこれまで受けてきた教育で，学習や読書することの意味や面白みを教わったことがないと言うのである。学習の必要性は，テストに出るから，内申書に響くから，などの表

層的な理由ばかりを聞かされ続けてきている。数学も理科も，漢字書き取りや歴史の年号と同じように，覚えてきたことを期末試験の用紙に上手に再現するという作業を反復してきたという。

このような資質の彼らであるから，指導する上で，また彼らが理解を進めていくうえでの多くの障碍がある。

ここ数年，本稿の筆者は，それを意識した実験的な授業展開と試験の出題を行ってきた。そこから観測された問題点を洗い出し，その克服に重点を置いた教材例を提示することを本稿の目的とする。

2．観察結果

本章は，筆者が東京経済大学で担当する，基礎経済学（経営学部新入生向けのミクロ経済学），経営数理入門（経営学部新入生向けの数学入門科目），市場の経済学（現代法学部2・3年生向けのミクロ·マクロ経済学の入門科目で，当該学部唯一の経済学科目）の講義でおもに観測された結果である。年度や配当曜日時限などによって多少の変動があるが，概ね100～150人規模の履修者数の場合が多い。市場の経済学だけは250人ほどの履修者がいた。

観測された事実と，それを観測するに至った方法とを順に列挙していく。

2-1　文で示された内容を解釈して自分のものとすることができない

統計学を扱った授業において，平均と標準偏差のもつ線形変換に関する性質についての説明をし，演習問題を行った。そこでは次のような例題を用いた。取るに足りない簡単な練習問題のつもりで出題したものであったが，思いがけない反応が返ってきたことを最初に述べることにする。

（例題1）公転周期と数え歳

ある国の平均寿命は50歳で，標準偏差が15歳の正規分布に従っている。

この国のある惑星では，1年の長さが地球の1.2倍に相当し，年齢は生まれたときを1歳として数え始めていることがわかった。

地球上での年齢に換算した場合の，この国の平均寿命と標準偏差を求めよ。

（解）

この国での年齢を x，地球上での年齢を y とする。

生まれた時点で，$x = 1$，$y = 0$ となる。$x = 2$ のときには $y = 1.2$ となり，以後，x が1増えるごとに y が1.2ずつ増えるという関係で，すなわち，$y = (x - 1) \times 1.2$ というだけのことである。

平均寿命も $x = 50$ を代入して，$(50 - 1) \times 1.2 = 58.8$，標準偏差は1.2倍で18となる。（解答終）

この問題に対して，多くの学生から驚くべき答えが返ってきた。彼らのなかでは，1年＝365日が，まるで1分＝60秒と同等に固定観念として備わっていた。1年というのが太陽の周りを1周するのにかかる時間から定められたことを知識として備えていなかったのであ

る。それ自体はさほど驚くほどのことではないが，1 年の長さは惑星によって異なることを説明した後でさえも，1 年 = 365 日が頭から抜けない者がほとんどであった。したがって，多くのものが 1 年というものの定義を更新することができないまま，次のような解答が相次いだのである。

$365 \times 1.2 = 438$

$365 \times 50 = 18250$

$18250 \div 438 = 41.6$

$1+41.6 = 42.6$　…答

最初の式では，この惑星での 1 年の長さを日数に換算したことになる。次の式は，なぜか地球での 50 年の長さを日数に換算してしまう。3 番目の式で除算をすれば，地球の 50 年がこの惑星での何年に相当するかが計算されるだけである。最後の式でも 1 を加えるか減ずるかが反対である。つまり，物事の意味を考えるよりも，問題に出てきた数値を適当に加減乗除しているだけなのである。答えが出せなくても，問題を読んだだけでこの惑星の 50 年は地球における 50 年よりも長いことは明らかであるにも拘わらず，それに気づくこともなく漫然と解答している状況が観測されたということである。

何年目や何日目という言い回しの場合，初年や初日を含めてそこを 1 と数え始めるのが普通である。すなわち，この惑星のように生まれた時点を 1 とする数え歳が実は普通で，満年齢のほうが特殊な数え方となっている。このしくみは理性的に理解している必要まではだろうが，少なくとも感覚的には理解していないと，何年目や何年ぶりといった日常よく使われてい表現が通じないのではないだろうか。最初の 1 を加えるべきか減ずるべきかの感覚が身に付いていないとが，このように満年齢に換算する作業をすると明らかになってしまう。

この事例は，文章等によって示された新しい知識（1 年の長さは惑星によって異なること）を，吸収して自分の言葉で表現しなおすことができず，過去の固定観念にひきずられていることがわかったものであった。知識に対して保守的であるのか，それまでの勉強が暗記にたよるものであったためか，理由をつけることはいろいろ可能である。しかし，決して得意ではなかった科目に真面目に取り組む姿勢のある履修者たちである。無気力や努力の不足に責を負わせることはお門違いである。

また，問題自体が解らないのであれば「$x = 1$，$y = 0$ となって，$x = 2$ のときには $y = 1.2$ となり，$x = 3$ のときには $y = 2.4$ となり，…」というように，当然行われるべき様子見の試行もまず行う者はいない。少し考えてみても埒が明かなかったら，とりあえずは手近な規模で列挙や試算をして様子を見ようという作業は考えつきもしないことのようである。

つぎにあげる事例も，言語解釈能力の不足を如実に示すことになる。

（例題 2）誤り訂正問題

A さんは，経済学用語を説明する問題に次のように解答したが，結果はどれも 0 点だった。A さんの間違いを訂正し満点の解答に修正しなさい。

修正は 5 文字以内とし，「〇〇〇を△△△に直す」の要領で答えなさい。

(1) マネーサプライ…市場全体に供給され，取引に利用することができる現金通貨の量
(2) 資産効果…土地などの資産価値の上昇がその保有者の富を高め，貯蓄額を増加させること

(解) (1) 現金通貨 → 貨幣
(2) 貯蓄額 → 消費支出

試験にはどんな書籍も電子辞書も持ち込み参照可である。ただ用語の説明をさせるだけの問題では，持ち込み資料にある説明を転記するだけであるので，出題形式を少し変えてみたものである。また，説明を全面的に書き換えるという荒業を禁止するために，訂正する字数制限を設けてある。さらに，試験のときには口頭で「たった5文字以内の間違いで0点であったのだから，致命的な間違いであって，言い回しなどの細かいところの間違いではない」ことも強調した上で解かせている。同時に，説明されるべき用語（この例題の場合，マネーサプライと資産効果）のほうを改変することも禁止と伝えてある。

ほとんどの受験者は電子辞書で引くか，教科書の索引で探すかの作業をし，問題文との照らし合わせをして解答することになる。

この問題は10年以上使ってきている形式なのであるが，以前は「○○を△△に直す，の要領で…」と注記していた。ところが，「○○を△△」だから計5文字なのか，との質問が試験中に出され，度肝を抜かれた。修正は5文字以内，ということは○○の部分が5文字以内，若しくは○○も△△も共に5文字以内，のどちらかを示すのは明らかだろうと筆者は全く疑うこともなく考えていた。見た目の活字の文字数にしか見えない感覚は今でも理解できないが，それ以来「○○○を△△△に直す」に記述を変えた。今後，「○○○と△△△とは○と△の字数が同じことなのか」との質問が出される予想をしているが，これはまだ出ていない。その場合には「○○○を△△△△に直す」と記述を変えようと考えている。

この出題をした年の教科書は［18］であった。マネーサプライは同書31～32ページに説明がある。資産効果は65ページにある（どちらも，共著者のうち辻の執筆部分）。多少長くなるが，同書の当該部分の記述を引用する。

マネーサプライ（pp.31－32）

それではこのような貨幣（資金）市場での需要と供給を考えてみましょう。ここではより重要な供給を中心に検討します。経済に供給される貨幣量のことをマネー･サプライといい，金利や景気を左右する重要な概念です。マネー･サプライは貨幣をどう定義するかによって異なってきます。通常貨幣とは現金通貨，つまりお札（日銀券）を念頭に置きますが，貨幣とは取引に使用できるものと定義しますと，小切手やクレジット･カードも貨幣になります。経済学では，貨幣の定義に従ってマネー･サプライを次のように定義します。

資産効果（p.65）

株・土地といった資産の価値の上昇は，その資産保有者の富を高め，その結果消費支出を増加させます。これは「資産効

果」とよばれています。

どちらも，読点の打ち方に不適切なところのある，ややわかりにくい文章ではあるが，ひどい悪文というほどではないであろう。少なくとも，普通の大人にとって説明内容を理解することにとって特別な問題はない。

当該書の索引にも載っている用語であるので，それを引けば，この該当ページに容易にたどりつける。A さんの解答と見比べれば答えは簡単に出せるにちがいない問（ここで紹介した他にもやや難しい問もあった）と予想していた。

しかし，試験答案を回収し採点をしていると，どうにも奇怪な解答が 1 人ではなく複数人に見られた。宿題であれば，写すことによって不思議な解答が伝播することはよくあるが，これは試験である。持込可の試験でカンニングするとは考えにくく，実際，試験のときの着席表を確認したが離れて座っていた者が多かった。

その解答は，⑴ を現金通貨 → 通常貨幣，⑵ を貯蓄額 → 結果消費支出，と修正するというものであった。

すなわち，「通常，貨幣とは現金通貨，つまり…」となっているべきところの最初の読点が教科書にはなかったので，通常貨幣をひとつの単語と読み取ったということである。まるで機械翻訳の笑い話のようであるが，実際に 209 人の受験者のうち 11 人もがこう答えたのである。

かりそめにも試験の解答で，それより前に本の記述に出てきてもいない通常貨幣という単語を何の迷いもなく書いたのであろうか。知らない用語を解答に使う際には，その意味を確かめなければ自分の解答がその問題にふさわしいものであるかどうかが分らないはずである。暗記してきたことを答案用紙に再現するだけの作業を勉強と称して行ってきた者たちにとって，自分の解答が何を意味するかについての興味は失われているとしか考えられない。たとえ誤って読み取ったとしても，意味を確かめる過程のなかで，自分の取り違えに気づくことが人間としての進歩なのだと筆者は考えるが，通用しないらしい。

資産効果も同じ構造である。「その結果，消費支出を増加させます。」となっているべきところの読点が教科書にはなかったので，結果消費支出をひとつの単語と読み取ったということである。209 人中 5 人がこう答えた。

2-2　問題文にない事柄を補助的に導入することができない

例題 1 において，「この国での年齢を x，地球上での年齢を y とする」といった，その問題を解くにあたって自分が設定した約束事を明記する者も，出題者側が黙っていれば，まずいない。このことについては筆者はかなり前から気づいていたので，授業中に毎回のように繰り返し指摘してきた。そもそも，問題で指定されていない事柄を自分の判断で導入することは，問題の内容に対する理解が必要なものなので，x や y などの使い慣れたもの以外となると，持ち出してくること自体に勇気がいるようである。

補助的な指定を導入をすることで容易に解ける例を示す。

（例題3）ミニマックス［15］#104

ある学校の生徒たちが，縦横の列で長方形になるように並んでいる。それぞれの縦の列の中で一番背の高い生徒が選ばれたが，選ばれた生徒の中で一番背が低かったのはジョンであった。つづいて，横のそれぞれの行から一番背の低い生徒が選ばれたが，選ばれた生徒の中で一番背が高かったのはメアリだった。

ジョンとメアリでは，どちらが背が高いか。

（解）

ジョンのいる列の，メアリがいる行の場所をAとする。

Aにいる人はジョンより低いか同じで，この人よりメアリは低いか同じである。結局ジョンのほうがメアリより高いか同じである。（解答終）

この問題を解くことを目的として使っているものではない。入門科目ではない専門科目で，ゲーム理論の最大化プレイヤーのマックスミニ戦略と最小化プレイヤーのミニマックス戦略の利得の大小を説明するときに，理解を深めるために例え話として使ったものである。入門科目でも雑談の中で話してみたときには，ほぼ誰も明快な答は導出できなかった。

答えは二者択一であるので，半分の確率で当たる。入門科目の初回のガイダンスなどでこの問題を紹介して，社会に出てからは，なぜ答がそうなるのかの過程やその説明が重要視され，単に答えが合っているだけではいい評価をされないことも多い，という話に利用している。

2-3　何を述べれば答えになるのか分らない

解答とその過程をこちらが説明しても，それでどうして解答あるいは説明になっているのか理解されない場合もある。最後の最後まで説明を尽くさないと，あとは分かるでしょう，では済まないことがほとんどとなってきている。

これも，雑談のなかで使った問題である。

（例題4）2色塗り分けの問題［15］#98

平面が2色に塗られている。同じ色で塗られている1メートル離れた2点があることを示しなさい。

（解）

1辺の長さが1メートルの正三角形をとると，この少なくとも2つの頂点には同じ色が塗られている。（解答終）

2色で3地点だから，どれとどれかは指定できないが，必ず2箇所は同じ色にならざるを得ないでしょう，という念押しがないと多くのものはぽかんとしたままである。

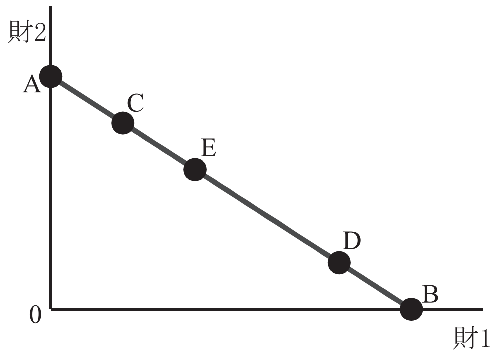
計算して数値を求める場合には到達点が明らかであるが，証明や説明の場合はどこが目的地点・終了地点なのかを見定められないものがほとんどである。これは数理的な問題に限ったことではなく，たとえば，次のような問題を出題したときにも大荒れとなった。この問題について，のちの授業で答を解説したあとでさえ，まだ自分の的外れな解答の正当性を主張する者が続出したのである。

（例題 5）無差別曲線

下図 1 は，横軸が財 1 の消費量を，縦軸は財 2 の消費量を示している。

線 AB は太郎さんの予算制約線を表している。点 C で示される財の組み合わせと，点 D で示される財の組み合わせとで，太郎さんの効用は同じであった。また，点 E で示される財の組み合わせのほうが，点 D で示される財の組み合わせよりも太郎さんの効用は高かった。

図 1　出題図



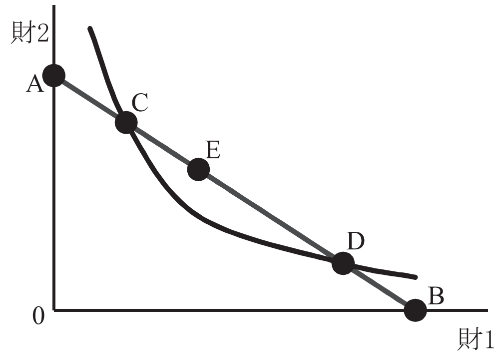
点 C を通る，太郎さんの無差別曲線を図にかきいれ，それが点 C を通らない無差別曲線とはどこが違うのかを説明しなさい。

（解）

同じ効用を持つ組み合わせは同一の無差別曲線上にくる。無差別曲線にはいくつかの一般的な特徴もあるので，それを考慮して作図すると次のようになる。

C を通る無差別曲線だけがもっている特徴は「D も通る」ということである。（解答終）

図 2　解答図



試験は教科書等の持込を可として行っているので，無差別曲線について細かく説明されたページを参照しながら解くことのできる状況である。

ごく基本的な，いわゆるサービス問題であるので，ほとんどの者が作図はできた。何も分からなくても，人間の心理としてこのような線を引くしかないとも言えるほど容易な作図である。しかし，自分の行った作図について，何を意図してどう書いたかを問う問題では，多くの者がまともな解答をできなかった。すなわち，無差別曲線のもつ一般的な性質を列挙したものが多数いたのである。「同じ効用を持つ組み合わせは同一の無差別曲線上にくる」ことは無差別曲線の定義そのものとも言えるような特徴のひとつである。だから，A や E を通る無差別曲線とは違って，C を通る無差別曲線は D も通るのであるが，その特徴を解答に書いた者であっても，もう，無差別曲線のもつ一般的な性質の列挙を本から書き写すだけに意識は集中し，それ以外のことには考えが広がらなかったようである。

あまりにひどい結果であったため，後日の授業でこの問題について解説した。無差別曲

線のもつ一般的な性質は，Cを通らないものでももっているから解答として不適当である。問われているのは，「Cを通る無差別曲線はそうなっているが，Cを通らない無差別曲線はひとつも残らずそうなっていない」特徴を解答するのである，と強調した。そのうえで，わずか4文字の「Dも通る」が満点解答であることを明かしたわけである。

翌々年，実質同じ問題を再度出題した際には，作図の問題と作図の説明の問題とに分けて，後者は次のように出題した。

「上の問でいま私が書き入れた点Cを通る線は『こうなっている』が，点Cを通らない無差別曲線はそうなっていない。」

状態を説明している『こうなっている』の部分を記述し，上の文を完成せよ。

2-4　表計算ソフトは何ら役立たない

少し複雑な計算や統計計算などに，パーソナルコンピューターの表計算ソフトウェアを活用して理解を深めさせようとする方法がある。三道［13］は，表計算ソフトを使用しての理数系科目の教育を試みた際の落とし穴について詳しく述べている。そこで述べられているように，表計算ソフトは簡単で便利であるというのは，使い慣れている者の感じ方であり，教わる側は何の目的で何をやらされているのかわからぬうちに，言われるがまま指図されたとおりに操作して，見本どおりの課題を提出しているに過ぎない場合が多いのである。

たとえば，［1］,［5］,［19］,［28］のように，Sheet番号･セル番地をすべて指定した上で，そこにどういう文字を入れて，どんな数値を入力するかを指定し，という具合に，ワークシートがゼロから完成するまでの手順を逐一のべてある手引書が数多くある。このような資料を用いて授業を行っても，教員の期待する成果はまずあがらないであろう。なぜなら，書いてあるとおりに単純な作業員として動けば，原理や背景などを理解してもしなくても，授業の目標物が出来上がってしまうのである（上述［13］によれば，これを「写経」という）。授業の要所々々で，原理や仕組みを説明して理解させることができれば成功であるが，まずうまくいくはずはない。なぜなら，頭を使わなくとも，とにかく書いてあるとおりに作業して写経を完成させれば，あとは提出まで適当に時間を潰せばよいのである。難解かつ下手くそな説明を聞くというのは合理的な行動ではない。

今や仮名漢字変換ができない者など居ないし，ネットで検索することも誰でもできる。プレゼンテーションのソフトもすぐに操作できるようになる。しかしこれらは，紙媒体で行われてきたことがパソコンという道具に代っただけで，百科事典をひもといたり模造紙にマジック書きすることと原理は同じである。計算ソフトを使いこなすということは，自分がどういう問題を解決したいのかという欲求と，その問題に対する理性的な整理と理解とがあったうえで，適切な計算処理を行って解を求められるようになることである。教える側の者は，普段の研究や事務仕事などで，解決すべき問題を自然と迎え入れて，その解決を繰り返している。しかし，習う側は，研究や嫌でもやらなければならない事務仕事などは基本的になく，それを処理した経験もない

ということを念頭に置いておかねばならない。たとえば，ゼミなどの合宿の決算を作るとき，たいした費目の種類もないのに，いつまでも時間がかかることがある。慣れていれば 1 時間もあれば終わることも，そうでない人には大仕事になる，という一例である。

数値さえ打ち込めば，即座に計算して何らかの答えを表示する装置は，問題の構造を理解する以前の者にとっては，結局何をやっているのか・何をやらされているのかが判らないまま作業が進み，物事の本質を知るためには何ら役立っていないのである。

2-5　問題の図示は理解の助けになっていない

この節ではまず，やや複雑な問題が，適切なグラフ表現を用いることによって効率的に解かれることを概観する。しかし，これらのグラフによる理解は，だれにでも共通することではないことがわかった。節の後半では，筆者が，多くの者はグラフを読み取れないということに気づかされた事例を紹介する。

鶴亀算をはじめとする，いわゆる算数の難問を特殊算と総称するが，そのひとつに旅人算がある。旅人算とは，複数の動点が時間の経過と共に移動する状況のもとで，動点の位置や移動速度，特定の状況が実現する時刻などを計算して求める問題の総称である。単純であれば，小学校で習う算数の範囲内で解けるものもあるため，中学校の受験問題にもよく採用されている。しかしながら，局面のパターンが多岐にわたるため，文章で書かれている問題の状況設定を完全に理解しないと手がつけられず，そう容易には解答できない。特殊算のなかでも最も有名な鶴亀算は一定のパターンに帰着して解くことができるのであるが，旅人算には憶えているパターンを当て嵌めて解くだけに頼るタイプの試験準備では太刀打ちできず，鶴亀算よりも困難な，最も難しい問題の種類であるといえる。

小学生向けの受験参考書として，あるいは［4］など大人向けの算数パズル本として，数多くの書籍が出版されているが，いずれも図を活用して解くことが推奨されている。

（例題 6）旅人算［12］

4 つの地点 A，B，C，D が等間隔にある。

P，Q の 2 人が同時に A 地点を出発して D 地点に向かった。

P は Q より 20 分遅れて B 地点を通過した。

P が C 地点を通ったとき，Q は 28km 先にいた。

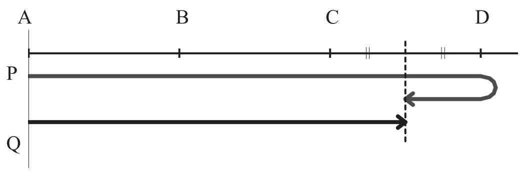
Q は D 地点に到着するとすぐに折り返した。

C 地点と D 地点とのちょうど真ん中で P と Q は出会った。

P と Q の時速と，AD 間の距離を求めよ。

多くの参考書類では，線分図を書いて，たとえば以下のようにして答えにたどり着くように解説されている（この問題の出典［12］に掲載されている模範解答は図と式のみの記述であり，ここでの説明は著者の加筆)。

図 3　旅人算の線分図



（解）

Q は P より 20 分遅れて B 地点を通過したのだから，倍の距離を進んだ C 地点では 40 分遅れになっており，その間に P は 28km 先に進んでいる。よって，

20 × 2 = 40（分）

28 ÷（40 ／ 60）= 42（km）

の計算によって，P の時速が求められる。

両者が出会うまでに，P は 3 区間半，Q は 2 区間半進んだわけだから，P と Q の速さの比は

3.5 ： 2.5 = 7 ： 5

であり，P は時速 42 ｋｍなので

42 ×（5 ／ 7）= 30

で Q は時速 30km となる。

また，両者の速度差と Q の時速の比は

（7 − 5）：5 = 2 ： 5

であり，両者の距離差が 28km できる間に，Q は AC 間を進んだのであるから，

28 ： AC = 2 ： 5

AC = 28 ×（5 ／ 2）= 70（km）

AC は AD の 2 ／ 3 であるから，

AD = 70 ÷（2 ／ 3）= 105（km）

（解答終）

ところで，この求め方をする限り，実は図はほとんど必要としない。図があったほうが頭の中は整理しやすいかもしれないが，受験問題慣れしている者でないととても理解できない解き方である。式だけが記述されているものを，家庭内で親が子から質問を受けたとしても，ほとんどの親は解説できないであろう。

それは，ここで提示されたような図は不適切であり，問題の構造を理解する助けにならないものだからである。ただ一律に図を描けば，いつでも理解が深まるということではない。

旅人算の場合，動点が時間と共に場所を移動するので，線分図のような 1 次元の図形では情報を表示しきれない。この問題の背景をすべて表示するには 2 次元の図が必須となる。そして，これにふさわしいと考えられる図示方法として，鉄道の運行状況を表すことに実用化されている，ダイヤグラム表示がある。これは，横軸に時刻を，縦軸に位置を目盛った 2 次元図表で，動点の動きは図中の右下がり線もしくは右上がり線で表されることになる。ダイヤグラムのなかで，水平線と垂直線を 2 辺にもつ直角三角形は，時間･距離と速さの関係が直接に表示される。すなわち，垂直辺の長さを水平辺の長さで除した値が速さという関係になるのである。

例題をダイヤグラム表示すると次のようになる。

題意より，gh = 20 分，ij = 28km となる。この図に基づいて解を求めるにはたとえば次のようになる。

（解）

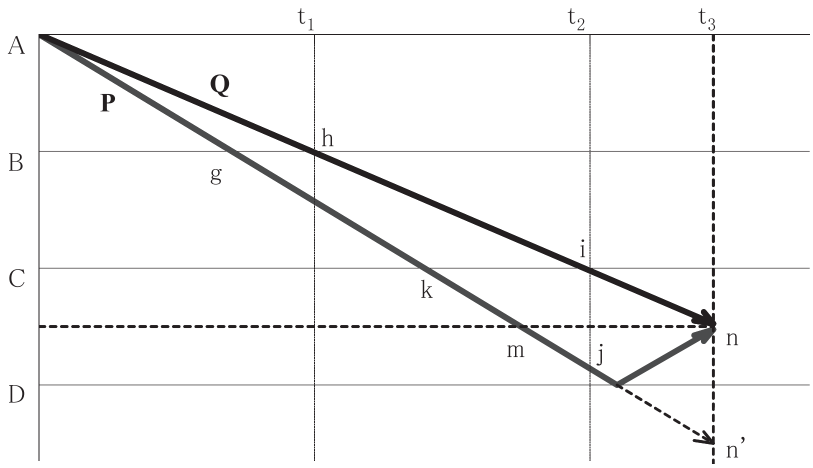
△ Agh と△ Aki の相似により，ki = 40 分。△ kij において，ki = 40 分で ij = 28km であるから，P の時速は

28 ÷（40 ／ 60）= 42

と求められる。

△ Agh と△ Amn の相似により，mn = 50 分。

図 4　旅人算のダイヤグラム



すなわち，D の横軸に関して n の鏡像に位置する n' を頂点に持つ△ mnn' において，mn = 50 分間に時速 42km で nn' を進行したことになるから，

42 ×（50 ／ 60）= 35（km）

が 1 区間に相当する距離であり，AD 間は 3 倍で 105km となる。

（Q の時速の求め方は線分図のときと同じであるので省略）　（解答終）

Q の時速を求める方法以外については，三角形の相似を使うことなどで，ダイヤグラムにより視覚的に明示できるようになったと言える。

このように，旅人算にはダイヤグラムを利用することにより，思考において相当な援助となるわけであるが，たとえばこの通りの説明をしたとしても，実際にはほとんどの学生は理解できない。こういった問題を筆者は何箇所かで紹介したことがあるが，生徒・学生の質などに関係なく，理解できる者の割合はあまり変わらなかった。そのことを意欲や気力の低下が原因と断ずることは容易であるが，それでは観察力の欠如である。

慣れている者にとっては理解の助けに他ならない図示ではあるが，多くの学生にとって，実はそれを読み取ることが大変不得手であることがここ数年の教育現場経験により観測できた。初等中等教育の責任といった単純な原因ではなく，本人の努力の甲斐もなく図を読み下すことがままならないというのが紛れもない事実だということである。

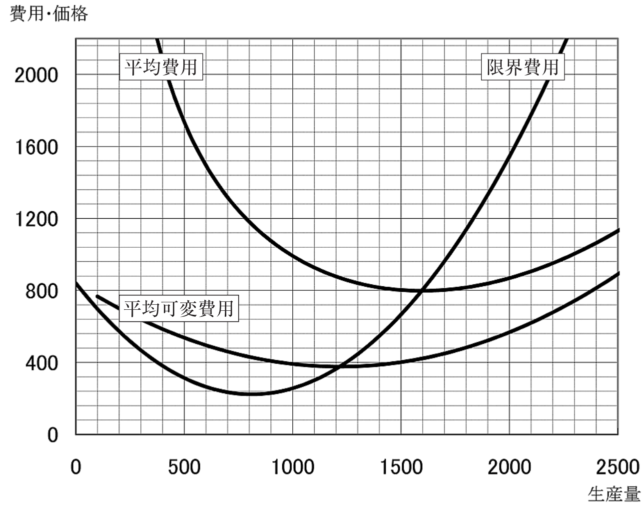
この事実は，ミクロ経済学の試験で次のような出題を数年間に亘って行ったことにより，さらに確証された。

（例題 7）ミクロ経済学　短期生産計画

下の図は，ある企業の短期生産計画における費用を調べたものである。

(a) 平均可変費用と平均費用との差が 800 となる生産量を求めよ。

図５　出題図



（b）平均可変費用が損益分岐点価格と等しくなる生産量を求めよ。

（c）産出品の市場価格が 1200 のときに，利潤最大となる生産量を求めよ。

（d）最大利潤の生産量が 2000 となるときの製品市場価格を求めよ。

（e）固定費用の額を求めよ。

（f）現在生産している量 q では利潤がゼロとなっているが，生産量を 500 減らして q − 500 にすると利潤が最大になるという。q を求めよ。

（解）

（a）平均可変費用と平均費用との差は単調に減少するので，唯一の生産量が容易に見つかる。生産量 950

（b）損益分岐点価格は平均費用と限界費用の交叉しているところの価格である（800）。生産量 2350

（c），（d）市場価格に限界費用が一致する生産量で利潤が最大となる。生産量 1850，価格 1550

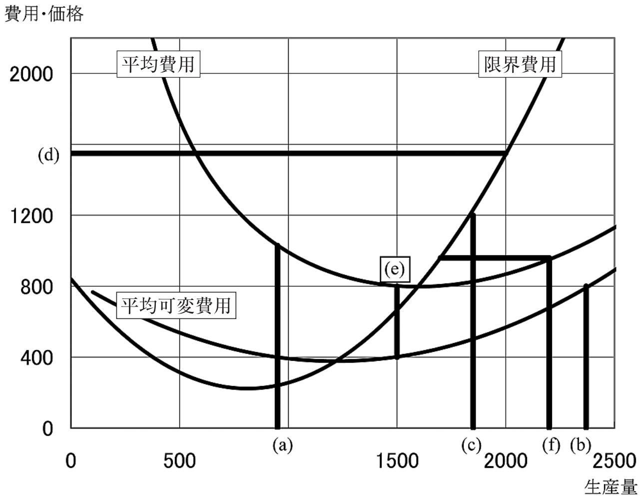
（e）任意の生産量における平均費用と平均可変費用との差にその生産量を掛ければ求められる。たとえば生産量 1500 で差が 400 なので，固定費用 600000

（f）市場価格と平均費用が等しいと利潤がゼロになる。よって，平均費用と限界費用とが水平方向に 500 離れている価格を探す。生産量 2200（価格 960）　（解答終）

用語の意味さえ分かれば，グラフを読み取るだけの問題である。何を答えればいいのかも，迷うことない明快な問題である。これも，教科書等の持込を可としたので，用語が分からなければその場で調べることもできる状況で実施した。この問題を含む試験は 107 名が受験した。平均点は各問とも配点 10 点で，（a）7.0 （b）7.0 （c）6.9 （d）7.1 （e）2.3 （f）0.7 であった。

授業でもかなりしつこく繰り返した題材であったので，さすがに（a）～（d）は解答で

図 6　解答図



きた者のほうが多かったが，解答された数値は誤答ではないものの不正確なものも多かった。出題はかなり細かく格子状に線を引いたグラフを用いた。答えは必ずしもその格子点になっていないものを多くしたが，安易に近くの格子点の値を解答した者もかなりいたのである。解答した学生達の何人かにあとで聞いた話によると，格子点になっていない場所を周りの数値から概数的に読み取ることなどは全く想像だにしなかったということだった。すなわち，グラフは全体の傾向を捉えて図示された内容を考えるための道具ではなく，数表と同じような数値の表示物にしかなっていないということである。前の節で述べた，問題文にない事柄を補助的に導入することができないこととも通ずる事実である。

さらに，解答までに一手順多くなる（e）（f）については，正解者はもちろん，解答に着手できた者すら少なかった。グラフが読み取れないのであるとすれば，それを絡み合わせて解答を導き出すことが極めて困難であるというのは，至極当然な結果であったともいえる。

数理的な科目を担当している教員は，複雑な演習問題を図によって視覚化することにより理解するという方法を，学生の時代から長年にわたって訓練し続けている。そして，その方法が多くの場合に思考の助けになっていることを実感している。さらに，自身にとって分りやすいものであるがゆえ，視覚化することが他の誰にとっても有効なことであると思い込みがちである。

しかし，これまで数学関係の科目をほとんど学んでこなかった学生たちにとっては，グラフの示していることを理解すること自体が実は大変困難なことなのである。算数でも数学でも，多くの指導者はそのことに気づいていない場合が多い。自分達が長年の興味と努力の積み重ねで得た，視覚からの熟達した理解能力を，これまでほとんど経験のない学生にわずかな説明で再現させようとすることは無理難題であることに気づくべきである。最初にあげた旅人算の線分図は，この程度の問

題なら図などなくても解くことのできるような熟達した指導者が，伝達する相手の事情を見通せないままに誰でもそれで理解可能であると安易に判断したことで，あのような分りづらいものになってしまったのだと筆者は考える。

3．考察

例題１に関して様子見の試行をしようとするものは皆無であると述べた。これは怠慢なのではなく，問題に立ち向かう，ということの方法を知らないことが原因でると考える。数学も含めて暗記に頼る試験対策を積み重ね，試験に出された問題とのパターン認識の速さがその得点を決めるようなことをしてきたものにとって，記憶の多さがすなわち成績の良さであるとの認識が定着してしまっている。以前に教わったことがないものが解けなくて何が悪い，ということである。初めて教わるときにも，手順のあらすじが提示された穴埋め方式のワークブックなどで行われることが多いようで，白紙の状態からじっくり時間をかけて解く，という作業をやったことがなく，それゆえそのやり方もわかっていないのである。

例題２に関して，マネーサプライと資産効果の両方に珍解答した者はいなかった。つまり，もう片方の問題を解いているときには，読点の不備を補って読み取れていたということになる。読み取り解釈能力が著しく劣っていたという単純な話ではなかった。冷静·慎重に読み取ることが全くできないのではなく，持続できない若しくは波があるということが大きな問題である。わずか１時間ほどの試験の間ですら集中力が持たないことの一端が表出したものと分析する。

例題３および４に関しては，単一の用意された答さえ求めればよいという風潮に載せられてきた者が，何をどうしていかば問題解決となるかの道筋をみつけられない，あるいは完全に示されなければ考えを深めようとしない状態である。

例題５に関しては授業で解説をしたと述べたが，その授業終了後に質問者があった。自分は正しいことを書いているのに誤答とはどういうことか，という趣旨であった。事実として正しいことを記述したとしても，問にたいする解答としてふさわしくなければ誤答であるという，試験の最低ルールがわかっていないのである。教科書の無差別曲線に関する記述を書き連ねれば答えになると思って疑わないのであった。これまで，それらしいことを解答欄に書けば点をもらえていたのであろうか。その学生には，ここに「私のお母さんは女性です」と書いてあったら，あなたはそれを正答とするのか，と問うて追い返した。

翌々年の改定した問題は，解答の指針を示して誘導したため，正解率は上がった。しかし今度は無解答が前に比べて多くなってしまった。教科書の当該テーマのページに載っているそれらしい図を真似て書いて，自分自身も分かっているつもりに誤魔化している者には，解答の自由度が狭まったために的外れな記述ができなくなってしまったようだ。

例題 6 のダイヤグラムは，学生達にとってはかなりの強敵のようである。時間と距離・速さの関係が理解できていない者が少なからず居ることは確かだが，それは大人でも同様であろう。そこを理解することは，過去に教わったことを思い出したり気づいたりすることだけなので，ほんの少しの説明を行うことで殆ど解消できる。問題は，図を読み取ることが根本的にできないということである。これについては，例示を繰り返し，演習問題も繰り返し行わせることでなんとかするしかなかった。

ダイヤグラムを書けば，起点が上に，終点は下のほうに書くことになる。よって右下がりの線が起点から終点に向かう動点をあらわすことになるので，起点の東京から出る列車を下り列車というのだ，などのミニ知識をいれると，演習の繰り返しのときでも履修者の食いつきがよくなる。

以上の要点をふまえて，非常に複雑な問題について，細かく説明を用意してうまくいったと思える例を次章で紹介する。

4．対策例

普通の旅人算も難しいが，さらに自転車の使用が加わったスケジューリングの問題になると，旅人算は格段に難しいものになる。そこでは，ダイヤグラムを用いずに頭の中で解くことは，まず不可能である。この問題について，きめ細かく説明した事例を以下に示す。

（例題 8）自転車のある旅人算［24］

一本道の 10km を旅する 3 人 P，Q，R がいる。一人乗りの自転車が 1 台だけあり，これを 3 人で乗り継いで使う。各人の徒歩の時速（km）は $p_w = 3$，$q_w = 2$，$r_w = 2$ であり，自転車での時速（km）は $p_b = 16$，$q_b = 12$，$r_b = 12$ である。

自転車の乗り継ぎは，人から人へ渡すことも，先に乗っていた人が道路のある地点に乗り捨てておいて，後の人がその地点に行ってそこから乗ることもできる。

全員が目的地に到着するまでの最短の所要時間を求めよ。$p_w = 4$km の場合はどうか。

問題を紹介した時点で，状況が理解しやすいように，抑えておくべきところを見ていくことにする。もちろん，ダイヤグラムが表すものおよびその読み取り方などについては，充分な説明を済ませたうえでの段階である。

まず，明示はされていないが，自転車の乗り降りにかかる時間はゼロであることを確認する。もちろん加速や減速にも時間はかからない。

自転車は誰かが乗らないと移動しないので，誰が利用する場合であっても，起点から利用するか，利用する地点で他の人と交代するか，利用する地点に前もって他の人が乗り捨ててあるかのいずれかでなければならない。また，乗り継ぐ者のほうが時間的にあとから利用することも当然である。

さらに，誰もが使用しない区間があったら，それより先の区間では誰も利用できないことになる。しかしこの場合，全員が徒歩ということになってしまうので，誰もが徒歩を自転車に変更すれば到達時間が早くなるので，最

も早くゴールする計画では，誰も自転車を使用しない区間が存在するという状況はあり得ない。よって，自転車は起点から目的地まで走り通すことになる。

誰か1人が他者よりも先に目的地に着いてしまった場合，その先着者の自転車での進行距離を減らして，それを他者が使うようにすれば全体の到着時間が早くなる。よって，全員が目的地に到着するまでの最短時間は，3人同時に到着するスケジュールがあればそのなかに見出されることは明らかである。

以上のことより，各人は徒歩と自転車で合計10km移動し，自転車も3人の利用合計で10km移動し，各人の移動時間が等しくなる計画を求めればよいということになる。

10km先に同時にゴールするスケジュールは各人の徒歩と乗車の時間をすべて半分にすれば，5km先に同時にゴールするスケジュールとなる。この，5kmのスケジュールを間をおかずに2回繰り返せば，当初の10kmスケジュールと同じ時間で到達できることになる。すなわち，全員が目的地に同時に到着するスケジュールは，それぞれの徒歩･乗車の時間を相似縮小したものを集めて合計10kmとすることで，可算無限とおりのスケジュールが得られることになる。しかし同じパターン複数回の繰り返しは実質的に同じ解であるので，そういう部分を含まない，乗り換え回数がなるべく少ないものが模範的な解といえるだろう。これも問題に明記はされていないが，確認しておくことにする。

QとRは徒歩も自転車も速さが同じであるので，この2人の区別は必要ない。それ以外にも，自転車を使用する順番に任意性があることもある。その場合も実質的には同じ解となるわけであるから，たとえば対称性があるなどの理由で直感的に理解しやすいものを模範的な解として提示することが好ましいといえる。どんな基準を以て分かりやすいとするかの判断はかなり恣意的となるが，必要なことではある。

こちらとしては何ら曖昧性を感じないような事柄についてでも，思いもよらないことに関して躓き悩む学生が必ず出てくる。これで完全というわけではないが，解き始める前に以上に述べた程度の説明は最低限加えておく必要がある。

（$p_w = 3$の場合の解）

速度の遅いQとRが5kmずつ徒歩と自転車とした場合，

$5 / 2 + 5 / 12 = 2.916 \cdots$

となり，Pがすべて徒歩で行くと

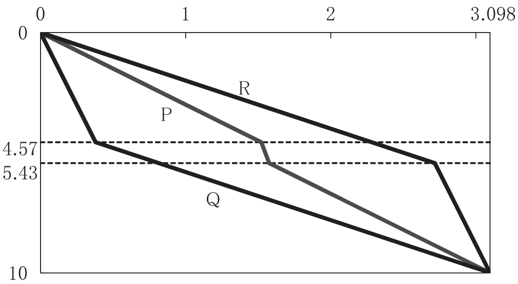
$10 / 3 = 3.33 \cdots$

となる。よって，QとRの自転車の時間をもう少し減らしてPに廻すことで，Pのゴールまでの時間を短縮しQとRの時間を延ばして，同時に到着するようにすればよい。自転車乗り継ぎ時間の前後の問題が生じないように考えれば，たとえば，Qが最初5km弱の距離で自転車を使い，Rが目的地までやはり5km弱自転車を使うこととし，Qが降りてからRが乗るまでの間をPが自転車を利用するようにすればよいとわかる。

この状況をダイヤグラムに表せば次図のようになる。

求めるゴール時間をt，Pの自転車利用時間をx，QとRの自転車利用時間をyとする。

図 7　自転車のある旅人算（$p_w = 3$）のダイヤグラム



Ｐの移動に関して，徒歩の時間が t － x で，自転車の時間が x で合計 10km 進行するから，

$3(t - x) + 16x = 10$

Q，R の移動に関して，同様に，

$2(t - y) + 12y = 10$

自転車の移動に関して，3 人の利用の合計が 10km になるから

$16x + 2 \times 12y = 10$

が成り立たねばならない。

この 3 式を連立させて解いて，

$t = 285/92$，$x = 5/92$，$y = 35/92$

となる。

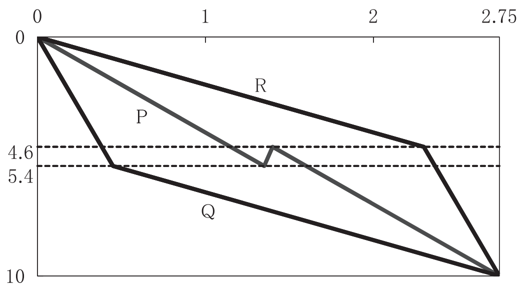
よって，3 人同時に 3 時間 05 分 52 秒でゴールする。出発地から 4.565km の場所を A 地点，5.435km の場所を B 地点とする（出発地～ A と B ～目的地の距離は等しくなる）。P はまず 1 時間 31 分 18 秒で A まで歩き，そこから自転車で 3 分 16 秒に 0.870km 進んで B に，さらに 1 時間 31 分 18 秒歩いてゴールする。Q は自転車に最初に 22 分 50 秒乗って A まで進み，あとはゴールまで 5.435km を 2 時間 43 分 03 秒で歩く。R は最初に B まで 2 時間 43 分 03 秒で歩き，自転車に乗り換えて 22 分 50 秒でゴールする。自転車は A までをQが，次に B まで P が，残りを R が使用することになり，乗り換えの間はそれぞれ 1 時間 08 分 29 秒の間，道端に置かれていることとなる。（解答終）

（pw ＝ 4 の場合の解）

Ｐの徒歩速度が少し速くなっただけであるが，問題としては格段と難度が増している。すなわち，Q と R が 5km ずつ自転車を使っても，目的地に到達するまでの所要時間は先にも求めたとおり 2.9166 …となり，P が全区間を徒歩で行った場合の所要時間 2.5 よりも多くかかってしまうのである。また，最初に確かめておいたように，誰か 1 人が他者よりも先に目的地に着いてしまった場合には，その先着者の自転車での進行距離を減らして，それを他者が使うようにすれば全体の到着時間が早くなるのであるが，P はそもそも自転車を利用していない。したがってこの場合，P には進行方向とは逆の起点方向に自転車で戻ってもらい，Q と R の自転車利用距離を増やす方策をとればよいことがわかる。自転車を 2 番目に P が使用することは固定で，次図の乗り継ぎ計画が解となる。

求めるゴール時間を t，P の自転車逆行利用時間を z，Q と R の自転車利用時間を y とする。

図 8　自転車のある旅人算（$p_w = 4$）のダイヤグラム



Pの移動に関して，

$4(t-z)-16z=10$

Q，Rの移動に関して，

$2(t-y)+12y=10$

自転車の移動に関して，

$-16z+2\times 12y=10$

が成り立たねばならない。

この3式を連立させて解いて，

$t=2.75$，$z=0.05$，$y=0.45$

となる。

よって，3人同時に2時間45分でゴールする。出発地から4.6kmの場所をC地点，5.4kmの場所をD地点とする（出発地～CとD～目的地の距離は等しくなる）。Pはまず1時間21分でDまで歩き，そこから自転車で出発地方向に3分間で0.8km戻りCに，さらに1時間21歩いてゴールする。Qは自転車に最初に27分乗ってDまで進み，あとはゴールまで4.6kmを2時間18分で歩く。Rは最初にCまで2時間18分で歩き，自転車に乗り換えて27分でゴールする。自転車はDまでをQが，次に逆方向にCまでをPが，残りをRが使用することになり，乗り換えの間はそれぞれ54分間道端に置かれていることとなる。

（解答終）

5．まとめ

授業時に演習問題などをやらせ，机間巡視をしていると，じっと固まって動かない者が数多く居る。早く時間が過ぎて授業が終るのを待っているのではなく，本人はいたって真面目に考えているつもりなのである。そういう者に，「考えているのか」と尋ねれば，自信をって「考えています」との返事が返ってくる。そう返事をしてみても，頭の中では何等進展はしていない。

そういった状況が分かってからは，「30秒考えて何も見えてこなかったら，そのままあと5分考えても何も浮かんでくるわけはない。そのときは，何か別の作業に移りなさい」と何度も指導している。作業とは，問題を書き写すのでもよいし，問題を読み上げるのもよいし，隣の友人と問題の内容について話をしてみるのもよい，と伝える。このことによって教室が騒がしくなるようなことはまずない。何年かにひとり程度ではあるが，急速に力を発揮する者がいる。考えるという行為の方法が分かったことが原動力になったと信じたい。例題8の自転車のある旅人算を紹介した数週間後，ある履修者が，自分も自転車問題を作って解いてみたが，あっているかどうか見てほいと，申し出てきたことがある。

（例題9）3人の速さが異なる自転車問題

徒歩の時速が $p_w=4$，$q_w=3$，$r_w=2$，自転車の時速が $p_w=16$，$q_w=12$，$r_w=12$ である場合。

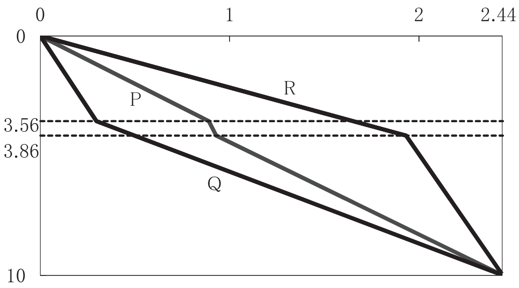
結果としては，図7と同様のパターンとなる結果であるが，3人の速度が異なるため，変数の個数および方程式の本数がそれぞれ1ずつ多くなり，計算はより複雑になる。

（解）

この状況をダイヤグラムに表せば次図のようになる。

求めるゴール時間をt，P，Q，Rの自転車

図 9　自転車のある旅人算（例題 9）のダイヤグラム



利用時間を x，y，z とする。

P の移動に関して，例題 8 と同様に，

4（t − x）＋ 16x ＝ 10

Q の移動に関して，同様に，

3（t − y）＋ 12y ＝ 10

R の移動に関して，同様に，

2（t − z）＋ 12z ＝ 10

自転車の移動に関して，3 人の利用の合計が 10km になるから

16x ＋ 12y+12z ＝ 10

が成り立たねばならない。

この 3 式を連立させて解いて，

t ＝ 215 ／ 88，x ＝ 5 ／ 264，y ＝ 235 ／ 792，z ＝ 45 ／ 88

となる。

よって，3 人同時に 2 時間 26 分 35 秒でゴールする。出発地から 3.561km の場所を A 地点，3.864km の場所を B 地点とする。P はまず 53 分 25 秒で A まで歩き，そこから自転車で 1 分 08 秒に 0.303km 進んで B に，さらに 1 時間 32 分 03 秒歩いてゴールする。Q は自転車に最初に 17 分 48 秒乗って A まで進み，あとはゴールまで 6.439km を 2 時間 08 分 47 秒で歩く。R は最初に B まで 1 時間 55 分 55 秒で歩き，自転車に乗り換えて 30 分 41 秒でゴールする。自転車は A までを Q が，次に B まで P が，残りを R が使用することになり，乗り換えの間はそれぞれ 35 分 36 秒と 1 時間 01 分 21 秒の間，道端に置かれていることとなる。（解答終）

計算結果はかなり複雑な分数となるが，提出されたレポートを検算すればすべて正しかった。たとえ少数であれ，授業で採りあげた題材について興味を持ち，自主的に追求をする者がいるということは，教育者冥利に尽きる出来事である。これではしつこいかと思えるほど細かな説明をしたことが無駄ではなかったとわかる。

成績表が本人の手元に届いたのち，「自分はきちんと出来ているはずだ」という問い合わせをしてくる学生がいる。答案用紙を出してみてみると，できているどころか，全く見当はずれなことが書かれている場合が多い。自分が出題を理解し，それにふさわしい答えを書いたつもりなっているのである。分かってなどいないにもかかわらず，自分自身を欺瞞して分かった気にさせてしまう現象はかなり多い。この現象は［3］，［21］，［23］などで指摘されているが，学生固有の現象ではなく，大人でもよく観察されるものである。多くの大学では，試験をしてから本人にその結果（その講義の単位取得の可否）が伝えられるまでに 2 ヶ月近くもの長い時間が空いてしまっている。それを少しでも解決するために著者は，試験をしたならば本人も何を書いたか忘れ去らないうちの，試験 2 ～ 3 日後には結果と模範解答を公表することとした。できたつもりになっているものは，自分の採点結果と

模範解答とをよく見なおすよう呼びかけている。その結果，単位取得の可否が出てからの問い合わせはほぼ皆無となった。

いわば温室で育ってきた者たちは，問題には答があり，その答は誰にとっても正誤が一致するものが当然であると何の疑いもなく思っている。問題の定式化をさせる練習でも，自分よがりの方法で見当はずれな答を出し，もう自分は出来たから，という態度で悠然としている者がいることも多い。自分は答を出したのだから何が悪いのかと言わんばかりの姿勢である。

学校でやるような，答の用意されているものは演習という。世の中で遭遇する問題というものには，答はないのである。こんな話を繰り返し言い聞かせることとしている。

「これは高校のときにやったことがないのでよく分かりません」と言い訳する学生がいる。この台詞はまさに大学という新しい場で新しい知識を吸収するという目的が見えていない者の発言である。ここまでのことを恥ずかしげもなく吐く者は特別であるとしても，新たな知識を身につけて使いこなそうという気力を持たない者が予想以上に多く含まれていることは事実である。考える喜び，知識を獲得することの満足感などを繰り返し言い聞かせていくことが必要である。

教育機関に所属する教育者は皆，よかれと思う教育を行っているはずである。自身をその現場まで導いた方法を伝授することも必要ではあろうが，誰もが教育者や研究者を目指しているわけではない。ほとんどの教育機関の目的とすることは，あまねく通用する人材を輩出することではないだろうか。普く通用する人，すなわち普通の人をきちんと普通につくりあげることが第一歩である。そうすれば自ずから，考えることを楽しみ，知識を得ることを喜びとする人物に成長していくものではないかと考えている。

参 考 文 献

[1] 浅利一郎, 土居英二, 藤岡光夫, 山下敬之, 石橋太郎, 伊藤暁人,『はじめよう経済学のための情報処理』, 1998, 日本評論社.

[2] 市川伸一,『学力低下論争』, ちくま新書 359, 2002, 筑摩書房.

[3] 岩田年浩,『したたか教授のキャンパスノート』, 1992, 学文社.

[4] 歌丸優一, 花摘香里,『つるかめ算が3時間でマスターできる』, 2001, 明日香出版社.

[5] 大塚友美,『実験で学ぶ経済学』, 創成社, 2005.

[6] 岡部恒治, 有田八州穂, 今野和浩,『文科系学生のための数学教室』, 有斐閣アルマ, 2004, 有斐閣.

[7] 岡部恒治, 戸瀬信之, 西村和雄,『分数ができない大学生』, 1999, 東洋経済新報社.

[8] 小野寺孝義, 狩野裕,『文科系の学生のための数学入門 1』, 2003, ナカニシヤ出版.

[9] 鑰山徹,『これから学ぶ文科系の基礎数学』, 2003, 工学図書.

[10] 久保田力,「本学教員（専任および非常勤講師）にみる授業改善に対する基本的問題意識の一端」, 浜松大学経営情報学部論集, Vol.15, 105-113, 2002.

[11] 小林吹代,『見えてくる数学』, 2007, すばる舎.

[12] サピックス小学部算数科,『旅人算』, 小学5年算数デイリーサポート 510-22, 2009, 進学教室サピックス小学部.

[13] 三道弘明,「文系での OR 教育に携わって」, オペレーションズ・リサーチ, Vol.54, 249-254, 2009.

[14] 汐見稔幸,『教育からの脱皮』, 2000, ひとなる書房.

[15] 志賀浩二, 増田一男,『数学のひろば 別冊』,

1998, 岩波書店.
[16] 島田博司,『大学授業の生態誌』, 高等教育シリーズ 107, 2001, 玉川大学出版部.
[17] 数学基礎学力研究会,『楽しい数学』, 1985, 東京図書.
[18] 辻正次, 八田英二, 『What's 経済学』, 新版, 有斐閣アルマ, 2003, 有斐閣.
[19] 時永祥三,『Excel による経営情報解析』, mimeo, 1997, 九州大学経済学部.
[20] 中森晶三,『けいこと日本人』, 玉川選書 80, 1978, 玉川大学出版部.
[21] 西林克彦,『わかったつもり』, 光文社新書, 2005, 光文社.
[22] 馬場敬之,『数学を人に教えられる本』, 2004, マセマ出版社.
[23] 藤澤伸介,『ごまかし勉強』, 2002, 新曜社.
[24] Chvatal, V.,『Linear Programming』, 1983, Freeman.
[25] Masuda,S.,「The bicycle problem」, 1970, University of California, Berkeley: Operetions Research Center Technical Report ORC70-35.
[26] 横山雅彦,『高校生のための論理思考トレーニング』, ちくま新書, 2006, 筑摩書房.
[27] 吉田寿夫,『本当にわかりやすいすごく大切なことが書いてあるごく初歩の統計の本』, 1998, 北大路書房.
[28] 涌井良幸, 涌井貞美,『Excel で学ぶ統計解析』, 2003, ナツメ社.

付記
本稿作成にあたり，2007 年度東京経済大学国内研究費の援助を受けた。

—— 2009 年 11 月 20 日受領——